Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

ӘОЖ 52: 531.51; 52:530.12 Қолжазба құқығында

МУРАТХАН АРАЙ

Эйнштейн өріс теңдеулерінің өстік симметриялы Квадрупольдық шешімдері

6D061100-Физика және астрономия

Философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Ғылыми кеңесшілер:
ф.м-ғ.к, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ- нің профессоры,
Абишев Медеу Ержанович
Екінші жетекші:
Ф.-м.ғ.к., әл-Фараби атындағы ҚазҰУ- нің қауымдастырылған профессоры
Бейсен Нұрзада Әбдібекқызы

PhD., Макс Планк радиоастрономия институтының DSc зерттеушісі,
Опавадағы Силезия университетінің доценті (Чехия)
Tursunov Arman

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2024

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ 4
1 ӨСТІК СИММЕТРИЯЛЫ ВАКУУМДЫҚ ШЕШІМДЕР 7
1.1 Өстік симметриялы, мультипольдік моментті кеңістік-уақыт 9
1.2 Статикалық квадрупольдық метрика және оның қасиеттері 15
1.3 q- метрика кеңістік-уақытындағы геодезиялық қозғалыстар 18
1.4 Шешімдерді генерациялау әдісі 29
2 ЖАЛАҢАШ СИНГУЛЯРЛЫҚТАР, ОЛАРДЫҢ ГРАВИТАЦИЯЛЫҚ ӨРІСІ 36
2.1 Ғарыштық цензура және Жалаңаш сингулярлық 36
2.2 Гравитациялық коллапс және жалаңаш сингулярлықтың қалыптасуы 42
2.3 Деформацияланған жалаңаш сингулярлықтардың гравитациялық өрісі 52
2.4 Деформацияланған кеңістік-уақыттағы геодезиялық қозғалыстар 60
3 ӨСЬТІК СИММЕТРИЯЛЫ, КВАДРУПОЛЬДЫҚ ЖАЛАҢАШ СИНГУЛЯРЛЫҚТЫҢ КӨЛЕҢКЕСІ 69
3.1 Астрофизикадағы көлеңке ұғымы 69
3.2 Сфералық симметриялы қара құрдымдар мен жалаңаш сингулярлықтың көлеңкесі 72
3.3 Осьтік симметриялы, квадрупольдық жалаңаш сингулярдықтың көлеңкесі және мимикер эффектісі 84
ҚОРЫТЫНДЫ 90
ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР 92
ҚОСЫМША А 100

АНЫҚТАМАЛАР, БЕЛГІЛЕР, ҚЫСҚАРТУЛАР ЖӘНЕ АУДАРМАЛАР

ds^2 - кеңістік-уақыт интервалы

R_{ij} - ковариантты Ричи тензоры;

R - Ричи скаляр;

$g_{\alpha\beta}$ - ковариантты метрикалық тензорлар;

$\Gamma^{ij}_{\ k}$ - Кристоффель символдары;

$T^{\alpha\beta}$ - энергия-импульс тензоры;

U^{α} - (u^{α}) заттың 4-жылдамдығы;

K - Кречман скаляры;

$\xi_t = \partial_t$ және $\xi_\varphi = \partial_\varphi$ Киллинг векторлары;

U - Ньютондық потенциал;

$A_{,x}$ - бірінші реттік дербес туынды $\partial A/\partial x$;

$A_{,xx}$ - екінші реттік дербес туынды $\partial^2 A/\partial x^2$;

q - квадрупольдық параметр;

ЖСТ – Жалпы салыстырмалылық теориясы;

ҒЦГ – ғарыштық цензура гипотезасы;

ОСД – Оппенгеймер-Снайдер-Датт;

ЛТБ – Леметр – Толман – Бонди моделі;

КТ – Күй теңдеуі;

ADM массасы – Арновитт-Дезер-Миснер массасы;

Compact objects – ықшам нысандар;

Black hole – қара құрдым;

Exact solution – дәл шешім;

Zipoy-Voorhees – Зипой-Вурхис;

Event horizon – Оқиға көкжиегі;

Naked singularity – Жалаңаш сингулярлық;

Repulsive gravity – Репульсивті гравитация;

Hoop conjecture – Құрсау гипотезасы;

Backward Ray Tracing – Кері сәулелер ізі;

КІРІСПЕ

Зерттеудің жалпы сипаттамасы: Бұл жұмыс өстік симметриялы квадрупольдық моментке ие Эйнштейннің вакуумдық өріс теңдеулерінің шешімдерін зерттеуге және деформацияланған ықшам объектілердің гравитациялық өрісін сипаттауға арналған.

Зерттеудің өзектілігі

Эйнштейннің салыстырмалылық теориясы арқылы ғаламды сипаттау, әсіресе жұлдыздар мен қара құрдымдар сияқты үлкен ғарыштық денелердің айналасындағы гравитациялық өрістерді түсіндіру, сондай-ақ, жалаңаш сингулярлықтар сияқты экстремалды құбылыстарды зерттеу қазіргі релятивистік астрофизика және жоғары энергия физикасы саласында маңызды бағыты болып табылады. Жалаңаш сингулярлықтар гравитация және кеңістік-уақытының дәстүрлі ұғымдарына экстремалды жағдайларда балама түсініктер ұсынады. Бұл жұмыс сфералық симметриядан мардымсыз деформацияланған жалаңаш сингулярлықтардың болуына әкелетінін атап көрсете отырып, квадрупольдық моменті бар массалық үлестірулерді қарастыру арқылы, жалаңаш сингулярлықтарды зерттеудің жаңа тәсілін ұсынады. Нәтижелер ықшам объектілердің гравитациялық өрістерін дәлірек сипаттауда массалық таралудың маңыздылығын атап көрсетеді, осылайша, теориялық тұрғыдан күрделі астрофизикалық құбылыстарды сипаттау үшін бұндай моделдердің мүмкіндіктерін ашып көрсетеді. Сондықтан, осьтік симметриялы, массалық таралуды ескеретін кеңістік-уақытты зерттеу - нақты жағдайлардағы ықшам объектілердің гравитациялық өрісін сипаттауда өзекті бағыт болып саналады.

Зерттеудің мақсаты

Эйнштейннің вакуумдық өріс теңдеулерінің квадрупольдық шешімдерін алу, квадрупольдық моментке ие, деформацияланған ықшам объектілердің гравитациялық өрісін сипаттау.

Зерттеу объектілері

Эйнштейннің осьтік симметриялы өріс теңдеулер, ықшам объектілердің гравитациялық өрісі, жалаңаш сингулярлықтар және қара құрдымдар.

Зерттеу тақырыптары(пәні)

Өстік симметриялы өріс теңдеулерінің квадрупольдық шешімдері, жуықталған шешімдер, жалаңаш сингулярлықтар, қара құрдымдар, шешімдерді генерациялау, Кречман скаляры, геодезиялық қозғалыстар, тиімді потенциалдар және квадрупольдық моменттер.

Зерттеу әдістері

Шешімдерді генерациялау әдісі, тензорлық алгебра және сызықты емес, дербес туындылы екінші реттік дифференциялдық теңдеулер жүйесін шешуге бағытталған аналитикалық әдістер және кері-бағытты жарық сәулелерін есептеуге арналған сандық моделдеу әдістері қолданылды.

Зерттеудің міндеттер:

1. Өстік симметриялы, квадрупольдық кеңістік-уақыттың геометриялық қасиеттерін зерттеу, еркін параметрдің классикалық физика шегінде мағынасын анықтау; Мардымсыз деформацияланған объектілердің сыртқы гравитациялық өрісін сипаттайтын шешімдерді алу, дербес жағдайларда шешімдердің дұрыстығын тексеру;

2. Өстік симметриялы, квадрупольдық моментті кеңістік-уақыттағы сынақ бөлшектерінің геодезиялық қозғалыстарын зерттеу, еркін параметрдің қозғалысқа әсерін бағалау;

3. Шварцшильд қара құрдымы үшін және жалаңаш сингулярлықтар үшін көлеңкелердің бұрыштық өлшемін анықтау және алынған шешімдерге талдау жасау;

Жұмыстың ғылыми жаңалығы. Диссертацияда алғаш рет келесідегідей нәтижелер алынды:

1 Эйнштейн теңдеулерінің квадрупольдық моментті жуықталған шешімі алынды. Бұл шешім сфералық симметриядан мардымсыз деформацияланған ықшам объектілердің сыртқы гравитациялық өрісін сипаттайды. Классикалық жағдайда, еркін параметр q Ньютондық квадрупольдық моментпен байланысты. Алғаш рет кеңістік-уақыттың геометриялық құрылымында $r = m$ гипербетінде жалаңаш сингулярлық пайда болатыны көрсетілді, бұл басқа квадрупольдық метрикаларда болатын сингулярлықтан ($r = 2m$) өзгеше. Бұл метрика осындай сингулярлықты көрсететін жалғыз метрика.

2 Алынған квадрупольдық кеңістік-уақыт метрикасында, квадрупольдық параметрдің кейбір мәніне сәйкес, радиусы $3 < r \le 6$ болатын орнықты дөңгелек орбиталар болатыны анықталды, бұндай орбиталар Шварцшильд метрикасы жағдайында пайда болмайтыны белгілі.

3 Статикалық, квадрупольдық жалаңаш сингулярлықтардың көлеңкелерінің бұрыштық өлшемі квадрупольдық еркін параметрге тәуелді, алыс қашықтықтарда, қара құрдым көлеңкелеріне ұқсас болады, сондықтан олар қара құрдымдардың баламасы болады.

Қорғауға арналған ғылыми ережелер:

1. Статикалық, жуықталған квадрупольдық шешім Эйнштейннің вакуумдық өріс теңдеулерін қанағаттандырады, деформацияланған дененің сыртқы гравитациялық өрісін сипаттайды, $r = 0$ және $r = m$ гипербеттегі жалаңаш сингулярлықты көрсетеді.

2. Алынған квадрупольдық кеңістік-уақыт метрикасында еркін параметрдің $-0.4 \le r < 0$ мәніне сәйкес радиусы $3 < r \le 6$ аймағында орнықты дөңгелек орбиталар бар.

3. Өстік симметриялы, статикалық, дәл квадрупольдық q-метрикада астрофизикалық көлеңкенің бұрыштық өлшемі квадрупольдық параметрдің $q \ge -1/2$ мәндерінде пайда болады. Статикалық бақылаушы үшін

квадрупольдық параметр $q = -1/2$ және кризистік импакт параметр $b_{cr} = 2m$ кезінде көлеңкенің ең кіші бұрыштық өлшемі пайда болады.

Зерттеудің теориялық және практикалық маңызы:

Бұл жұмыс теориялық зерттеу болып табылады. Табылған нәтижелер астрофизикалық ықшам объектілердің гравитациялық өрісін түсінуге, олардың квадрупольдық параметрлерін анықтауға мүмкіндік береді. Қара құрдымдар және олардың әлеуетті баламалары болып табылатын жалаңаш сингулярлықтарды терең түсінуге, релятивистік астрофизика, космология және бөлшектер физикасы салаларындағы біліміміздің кеңейту үшін теориялық және практикалық маңызы бар.

Алынған нәтижелердің сенімділігі мен негізділігі:

Алынған нәтижелер импакт-факторы бар жетекші ғылыми журналдардағы жарияланымдар және ҚР Білім және ғылым комитеті ұсынған журналдардағы жарияланымдар арқылы, сондай-ақ, отандық және шетелдердегі халықаралық ғылыми конференциялардың материалдар жинағындағы жарияланымдарының болуымен расталады.

Автордың жеке үлесі:

Зерттеу жұмысының дерліктей барлық бөліктерін, айталық әдебиеттік шолуларды есепке алғанда, әр бөліктегі зерттеу міндеттері үшін сәйкесті зерттеулер жасау және оларды қанағаттандыратын нәтижелер алу, дербес жағдайларда шешімдердің дұрыстығын тексеру жұмыстары толықтай автор өз бетімен жасаған. Тақырыпты ашатын міндеттерді анықтауды және алынған нәтижелерге сараптамаларды автор жетекшілермен бірге кеңесіп жасаған.

Жарияланымдар.

Зерттеудің негізгі нәтижелері бойынша 10 жарияланым бар: Web of Knowledge (Thomson Reuters, АҚШ), Scopus (Elsevier, Нидерланды) деректер қорындағы тізімнен шыққан журналдарда 2 мақалада; ҚР Білім және ғылым комитеті ұсынған журналдарда 5 мақалада, халықаралық ғылыми конференциялар жинағында 3 жарияланым бар.

Жұмыстың апробациясы

Диссертацияның негізгі нәтижелері Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ-дың физика-техникалық факультетінің семинарларында, сондай-ақ келесі халықаралық конференцияларда ұсынылып, талқыланды:

- «Фараби әлемі» - Халықаралық студенттер мен жастардың ғылыми конференциясы (2020 ж., Алматы қ., Қазақстан);
- «The Fifteenth Marcel Grossmann Meeting» - Халықаралық ғылыми конференциясы (2021 ж., Рим қ., Италия);

Диссертацияның құрылымы.

Диссертация кіріспе, негізгі 3 тараудан, қортынды және 1 қосымша, 122 әдебиеттер тізімінен тұрады. Диссертацияда 25 сурет болып жалпы 105 бетті құрайды.

1 ӨСТІК СИММЕТРИЯЛЫ ВАКУУМДЫҚ ШЕШІМДЕР

Жалпы алғанда, массивті ықшам объектілердің (нысандар) тобы астрофизикада қара құрдымдарды, нейтрондық жұлдыздарды, ақ ергежейлілерді, планета тәрізді ықшам нысандарды және басқа экзотикалық тығыз жұлдыздарды қамтиды. Ықшам объектілердің негізгі жалпы сипаттамасы - олар үлкен массаға және шағын көлемге ие. Әлсіз гравитациялық өрістер жағдайында, Ньютондық гравитация ықшам объектілердің физикалық қасиеттерін жақсы сипаттайды. Дегенмен, қара құрдымдар мен нейтрондық жұлдыздар сияқты өте массивті нысандарды зерттеу үшін релятивистік әсерлерді ескеру қажет. Сонымен қатар, пульсарлар мен квазарлар сияқты нысандарды тек релятивистік астрофизика шеңберінде ғана зерттеуге болады. Сонымен қатар, заманауи навигациялық технологияның дәлдігі Жердің және Күн жүйесінің басқа планеталарының гравитациялық өрісінің релятивистік әсерлерін ескеруді қажет етеді.

Барлық астрофизикалық объектілердің ең ортақ ерекшелігі – олар өз өсін айналады және сфералық симметриядан ауытқиды. Сфералық симметрияның табиғатта кездеспейтінін ескерсек, нақты астрофизикалық объектілер үшін қарастыратын ең қарапайым модель ол статикалық, өстік симметриялы геометрия болып табылады. Содан кейін, қарастырып отырған кеңістік-уақытқа айналуды қосып қарастыру біршама кең тараған математикалық арнайы әдістер бар. Бұл бөлімде Эйнштейн өріс теңдеулерінің өстік симметриялы шешімдері туралы маңызды зерттеулерге тоқталамыз. Мультипольдік моменттерді ескеріп, сфералық симметриялы емес өріс теңдеулерін шешуге арналған ұтымды генерациялау әдістерін, және солардың ішінде ең қарапайым, квадрупольдық моментті шешімнің қасиеттерін қарастырамыз.

Жалпы салыстырмалық теориясында (ЖСТ), ықшам объектілердің гравитациялық өрісі Эйнштейн теңдеулерін қанағаттандыратын метрикамен сипатталуы керек, атап айтқанда [1]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu} \ , \qquad (1.1)$$

Бұндағы $R_{\mu\nu}$ -Риччи тензоры, R – Риччи скаляры, $g_{\mu\nu}$ метрикалық тензор, және $T_{\mu\nu}$ энергия-импульс тензоры. Объектінің ішкі бөлігінде $T_{\mu\nu} \neq 0$, сондай-ақ сыртқы бос кеңістікте $T_{\mu\nu} = 0$.

Ықшам объектілердің гравитациялық өрісін сипаттайтын метриканы табу мәселесін жалпы жағдайда, өзара байланысты төрт жағдайға бөліп қарастыруға болады.

Біріншісі массалық таралудың бос кеңістік-уақытқа сәйкес өрісті сипаттайтын $(R_{\mu\nu} = 0)$ яғни, вакуумдық дәл шешімді табу.

Екіншісі, электромагниттік өріс теңдеулерін шешу арқылы зарядтың таралуын қарастыру

$$R_{\mu\nu} = 8\pi\left(F_{\mu\lambda}F_{\nu}^{\lambda} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\mu\tau} F^{\lambda\tau} \right), \tag{1.2}$$

мұндағы $F_{\mu\lambda}$ - $Q\left(x^{\mu}\right)$ зарядтың таралуына сәйкес келетін Фарадей тензоры.

Үшінші жағдайда, объектінің ішкі гравитациялық өрісін сипаттауға саяды, ол үшін, объектінің ішкі құрылымын сипаттайтын модельді ұсыну қажет. Ең кең тараған және танымал модель - бұл идеал сұйықтық моделі:

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + p\right) u_{\mu} u_{\nu} - g_{\mu\nu} p\,, \tag{1.3}$$

Мұндағы: $\rho\left(x^{\mu}\right)$ - тығыздық, $p\left(x^{\mu}\right)$ - қысым және u^{μ} 4-жылдамдық.

Төртінші жағдайға келетін болсақ, масса мен зарядтың бір уақытта таралуын есептеуден тұрады, яғни осы жағдайдағы өріс теңдеулерінің дәл шешімін табу қажет.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}\left(\rho, p, Q\right), \tag{1.4}$$

мұнда энергия-импульстік тензор үшін нақты модель ұсынылуы керек.

Жоғарыда аталған төрт жағдайда да есептердің әр қайсысын шешу өте қиын, өйткені Эйнштейннің өріс теңдеулері сызықты емес. Бұл қиындықтарды жеңілдету үшін гравитациялық өріс белгілі бір түрлендірулерге қатысты инвариантты деп есептеу керек.

Атап айтқанда, өріс стационарлық және осьтік симметриялы деп болжауға болады, бұл жағдайлар бақылаулармен жақсы сәйкес келеді. Нақты жағдайларда, ықшам нысандарың айналуы айтарлықтай ұзақ уақыт аралығында тұрақты болады және олардың пішіні сфералық симметриядан сәл ғана ауытқиды.

Жалпы салыстырмалылық теориясында Эйнштейн теңдеулерінің стационарлық осьтік симметриялы шешімдері астрофизикалық объектілердің гравитациялық өрісін сипаттауда өте маңызды рөл атқарады [2, б. 2]. Атап айтқанда, бұл топқа Максвелл өрістерін қамтитын қара құрдымдар және олардың жалпылама шешімдері кіреді.

Нақты шешімдердің бұл түрі соңғы бірнеше онжылдықта қарқынды зерттеулердің нысаны болды. Атап айтқанда, Эрнст өріс теңдеулерінің симметриялығы олардың нақты шешімдерін табуға мүмкіндік беретінін зерттеді, оның бұл зерттеулерінен кейін өріс теңдеулерінің нақты шешімдерінің саны күр өсті [3]. Бұл зерттеулер ақыр соңында шешімдерді генерациялау әдістерін дамытуға әкелді [2, б. 4], бұл әдіс арқылы алынған шешімдер бастапқы белгілі шешімдерге қарағанда табиғаты мүлдем басқа жаңа шешімдерді береді [4-12].

Математикалық тұрғыдан, өріс теңдеулерін тікелей шешудің қиындықтарынан құтылуға болады.

Жалпы салыстырмалық теориясы тұжырымдалған соң көп ұзамай [13] ең алғашқылардың бірі болып Вейл 1917 жылы стационарлық осьтік симметриялы гравитациялық өрістерді зерттеді. Атап айтқанда, Вейль статикалық жағдайда вакуумдық өріс теңдеулерінің негізгі бөлігі қарапайым сызықтық дифференциалдық теңдеуге келетінін анықтады. Сәйкес жалпы шешімді цилиндрлік координаталарда тұрақты коэффициенттердің шексіз қосынды түрінде жазуға болады. Ал жалпы шешімдерді зерттеуде коэффициенттерді таңдау физикалық тұрғыдан ең қызықты болып табылатын асимптоталық жазық шешімдерді табуға келіп тіреледі.

Бұл тарауда ЖСТ дағы гравитациялық өрісті сипаттайтын Эйнштейн өріс теңдеулерінің осьтік симметриялы шешімі, шешімдерді алудың қарапайым генерациялау әдістері және солардың ішінде өстік симметриялы квадрупольдық метриканың қарастырамыз. Сфералық симметриядан мардымсыз ауытқыған жағдайда, квадрупольдық моментке ие кеңістік-уақыттың маңызды геометриялық қасиеттері зерттеледі және квадрупольдық моменттің геодезиялық қозғалыстарға қосатын үлесі қарастырылады.

1.1 Өстік симметриялы, мультипольдік моментті кеңістік-уақыт

Алғаш рет, 1917 жылы [13, б. 117-147] Вейл Эйнштейн теңдеулерінің статикалық осьтік симметриялы вакуумдық шешімдерін зерттеп, осы топқа жататын және өстік симметриялы кеңістік-уақыттағы вакуумдық шешімдерді табуға оңтайлы сызықтық элементтің жалпы түрін тапты. Льюис (1932) [14] Вейл осы статикалық сызықтық элементті стационар (айналатын) жағдайға жалпылады және дербес жағдайларда стационарлық шешімдерді тапты. Осы Вейл-Льюис сызықтық элементін алудың бірнеше әдістері бар, атап айтқанда: Киллинг векторларын қолдану және асимптотикалық жазықтықты талап ету [15, 16], немесе тек Киллинг векторларын қолдану [17,18] және т.б.

Осы Вейл-Льюис сызықтық элементі үшін $g_{ab}\left(a,b=0,1,2,3\right)$ төрт өлшемді метрикамен сипатталатын кеңістік-уақыт болсын. Метрикалық тензор үшін цилиндрлік координаталарды $\left(t,\varrho,\varphi,z\right)$ енгізуге болады. Кеңістік-уақытының стационарлы және осьтік симметриялы сипаты метрикалық тензор коэффициенттерінің t уақытынан және азимуттық бұрыштан θ тәуелсіз болуын талап етеді, яғни, $g_{ab}=g_{ab}\left(\varrho,z\right)$. Сондай-ақ біз кеңістік-уақыт бір мезгілде координаталар бойынша инверсияға $t\to -t$ және $\varphi\to -\varphi$ -ге инвариантты деп есептейміз. Бұл қосымша талаптың физикалық мағынасы мынада: біз қарастырып отырған кеңістік-уақыт координаталарды таңдаумен байланысты болмауы, яғни ковариантты болуы керек. Осылайша, болжанған инварианттық мынаны талап етеді

$$g_{t\varrho} = g_{tz} = g_{\varphi\varrho} = g_{\varphi z} = 0. \quad (1.5)$$

Сондықтан сызықты элемент мынадай формаға ие болуы керек

$$ds^2 = g_{tt}2dt^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{\varphi a}d\varphi^2 + \left[g_{\varrho\varrho}d\varrho^2 + 2g_{\varrho z}d\varrho d\varphi + g_{zz}dz^2 \right], \quad (1.6)$$

Келесі формулалардың барлығында ыңғайлылық үшін біз келесі белгілеуді қолданамыз

$$A_{,x} = \frac{\partial A}{\partial x}, A_{,xx} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2},$$

(1.6) өрнегі квадрат жақшада берілген екі өлшемді метриканы әрқашан диагоналды түрге келтіруге болатыны туралы белгілі теореманы пайдалансақ, координаттарды түрлендіруді қолданып[16], сызықтық элементтерді бұдан да ықшамды түрге келтіруге болады.

$$ds_2{}^2 = e^{2\mu}\left(d\varrho^2 + dz^2\right), \mu = \mu\left(\varrho, z\right), \quad (1.7)$$

Эйнштейннің вакуумдық өріс теңдеулері үшін жоғарыдағы сызық элементін бұдан да оңай түрде жазуға болады. Сонымен Вейл-Льюис сызықтық элементтің соңғы түрін төмендегідей жазуға болады.

$$ds^2 = f\left(dt - \omega d\varphi\right)^2 - f^{-1}\left[e^{2\gamma}\left(d\varrho^2 + dz^2\right) + \varrho^2 d\varphi^2 \right], \quad (1.8)$$

Мұндағы f, ω және γ өріс теңдеулерін қанағаттандырады және олардың бәрі ϱ мен z ке тәуелді функциялар, жоғарыдағы сызықтық элементке сәйкес өріс теңдеулерін жазсақ:

$$f\left(f_{,\varrho\varrho} + f_{,zz} + \varrho^{-1}f_{,\varrho}{}^2\right) - f_{,\varrho}{}^2 - f_{,z}{}^2 + \varrho^{-2}f^4\left(\omega_{,\varrho}{}^2 + \omega_{,z}{}^2\right) = 0, \quad (1.9)$$

$$f\left(\omega_{,\varrho\varrho} + \omega_{,zz} + \varrho^{-1}\omega_{,\varrho}\right) + 2f_{,\varrho}\omega_{,\varrho} + 2f_{,z}\omega_{,z} = 0, \quad (1.10)$$

$$\gamma_{,\varrho} = \frac{1}{4}\varrho f^{-2}\left(f_{,\varrho}{}^2 - f_{,z}{}^2\right) - \frac{1}{4}\varrho^{-1}f\left(\omega_{,\varrho}{}^2 - \omega_{,z}{}^2\right), \quad (1.11)$$

$$\gamma_{,\varrho} = \frac{1}{2}\varrho f^{-2}f_{,\varrho}f_{,z} - \frac{1}{2}\varrho^{-1}f^2\omega_{,\varrho}f\omega_{,z}. \quad (1.12)$$

Айналмайтын дененің жағдайындағы өрнекті (1.8) теңдеуінен оңай алуға болады. Айналу жоқ жағдайда метрикада уақыт инверсиясына қатысты $t \to -t$ инвариантты болуы керек дегенді білдіреді. Демек, метрикалық тензордың құрамындағы g_{it} компоненті бар бөліктер жойылуы керек, яғни $\omega = 0$ (1.8). $f = exp(2\psi)$ арқылы жаңа функцияны енгізе отырып, жалпы статикалық осьтік симметриялы сызықтық элементі мынандай формаға келеді

$$ds^2 = e^{2\psi} dt^2 - e^{-2\psi} \left[e^{2\lambda} \left(d\varrho^2 + dz^2 \right) + \varrho^2 d\varphi^2 \right], \tag{1.13}$$

Жоғарыдағы сызықтық элементке сәйкес келетін өріс теңдеулерін ашып жазсақ, мынадай түрге келеді

$$\Delta = \psi_{,\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho}\psi_{,\varrho} + \psi_{,zz} = 0, \tag{1.14}$$

$$\gamma_{,\varrho} = \varrho \left(\psi_{,\varrho}{}^2 + \psi_{,z}{}^2 \right), \tag{1.15}$$

$$\gamma_{,z} = 2\varrho \psi_{,\varrho} \psi_{,z}. \tag{1.16}$$

Сонымен, (1.14) теңдеуі цилиндрлік координаталардағы екі өлшемді Лаплас теңдеуіне сәйкес келеді.

Жоғарыдағы (1.11, 1.12) (немесе 1.15, 1.16) өріс теңдеулерінен, егер f (немесе ψ) функциясы белгілі болса, метрикалық функцияны квадратуралар арқылы алуға болатынын көреміз. Сонымен Эйнштейн теңдеулерінің стационарлық осьтік симметриялы вакуумдық шешімдерін табу есебі сайып келгенде *f* метрикалық функциясы үшін (1.9, 1.10) немесе ψ функциясы үшін (1.14) теңдеулерін статикалық жағдай үшін табуға келіп тіреледі.

Өстік симметриялы шешімді алудың генерациялау әдістері

Зипой-Вурхис (Zipoy-Voorhees) метрикасы [19, 20] Вейл вакуумдық шешімдерінің класына жататын Эйнштейннің вакуумдық өріс теңдеулерінің дәл шешімі ретінде белгілі [2, 20 б. 304-305]. Зипой-Вурхис шешімін физикалық тұрғыдан мағынасы бар, q- метрика ретінде қарастыруға болады.

Атап айтқанда, метриканың асимптоталық жазық кеңістік-уақытты сипаттайтыны және екі коммутациялық гипербеттік ортогональды Киллинг (Killing) векторлық өрістері бар екені белгілі, соның нәтижесінде, кеңістік-уақыт статикалық және осьтік симметриялы болады; дербес жағдайларда, бұл метрикадан Шварцшильд метрикасын алуға болады, яғни Шварцшильд метрикасы оқиға көкжиегімен қоршалған шынайы қисықтық сингулярлыққа ие жалғыз шешім болып табылады[21-25].

Гравитациялық өрісті сфералық симметриялы емес массаның таралуын еркін квадрупольдық параметр арқылы сипаттайтын q-метрикасы ұсынылды. Бұл метриканы массалық таралулардың сыртқы гравитациялық өрісін сипаттау үшін пайдалануға болатыны, ондағы квадрупольдық момент объектінің деформациясын сипаттайтын негізгі параметр болатыны көрсетілді.

Сәйкесінше, бүкіл кеңістік-уақыт сипаттайтын және сыртқы метрикамен жымдастыруға болатын ішкі метриканы табу осы күнге дейін ашық түрдегі мәселе. Астрофизикалық ықшам объектілердің ішкі және сыртқы гравитациялық өрістерін сипаттайтын Эйнштейн өріс теңдеулерінің дәл шешімдерін табу үшін көптеген жұмыстар жасалғанымен нақты физикалық мәні бар шешімдерді табу күрделі. Ал қарапайымдылық үшін, әдетте жұлдыздар моделі үшін екі физикалық параметрі бар, яғни, энергия тығыздығы және қысымы бар идеалды сұйықты өріс көздері үшін ішкі массаның таралуын сипаттауға болады деп болжанады. Идеал сұйықтың энергия-импульс тензоры Эйнштейн теңдеуінде гравитациялық өрістің көзі ретінде пайдаланылады.

Сәйкес дифференциалдық теңдеулер жүйесін жалпы жағдайда шешу мүмкін емес екені белгілі, өйткені теңдеулер саны белгісіз функциялар санынан аз. Бұл мәселе әдетте сұйықтың қысымы мен тығыздығына байланысты күй теңдеулерін енгізу арқылы шешіледі. Дегенмен, Синге ұсынған басқа тәсілді қолданып мәселені басқаша қырынан қарастыруға болады[18, 300-306 б.].

Бұл әдісті қолдану үшін, алдымен жалпы физикалық тұжырымдамаларды пайдаланып, ішкі метриканың, немесе сызықтық элементтің формасы тұжырымдалады, содан кейін, Эйнштейн теңдеулерін пайдаланып, өріс көзінің энергия-импульс тензоры анықталады. Осылайша, кез келген ішкі метриканы энергия-импульстік тензор үшін Эйнштейн теңдеулерінің дәл шешімі ретінде қарастыруға болады.

Дегенмен, процедураның негізгі мәні - қарастырылған материя үшін физикалық тұрғыдан негізделген конфигурацияға сәйкес келетін физикалық шарттарды орнатуда. Жалпы жағдайда, энергияның таралуы оң болуы және шектеулі болуы т.б шарттарды қамтиды, сонымен бірге сыртқы метрикамен жымдастыру шарттарын және шектік жағдайда сыртқы метрикаға өтетін сәйкестік шарттарды қоюға болады.

Зипой және Вурхис Эйнштейн теңдеулерінің статикалық, осьтік симметриялы вакуумдық шешімдерін зерттеп, белгілі шешімнен жаңа шешімдер шығаруға мүмкіндік беретін қарапайым түрлендіру әдісін тапты. Бұл жерде генерациялау әдісін көрсету үшін біз сферойдалық координаталарда статикалық, осьтік симметриялы вакуумдық гравитация өрістері үшін жалпы сызықтық элементті мына түрде жазамыз (t, x, y, φ)

$$ds^2 = e^{2\psi}dt^2 - \sigma^2 e^{-2\psi}\left[{}^{2\lambda}\left(x^2 - y^2\right)\left(\frac{dx^2}{x^2-1} + \frac{dy^2}{1-y^2}\right) + \left(x^2-1\right)\left(1-y^2\right)d\varphi^2, \right. \tag{1.17}$$

мұндағы ψ мен γ метрикалық функциялар тек кеңістіктік координаталары x пен y ке тәуелді және σ нөлге тең емес нақты тұрақты шама.

Сәйкесінше, вакуумдық өріс теңдеулерін былай жазуға болады:

$$\left[\left(x^2-1\right)\psi_{,x}\right]_{,x}+\left[\left(1-y^2\right)\psi_{,y}\right]_{,y}=0,\quad \psi_{,x}=\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{1.18}$$

$$\gamma_{,x}=\frac{1-y^2}{x^2-y^2}\left[x\left(x^2-1\right)\psi_{,x}{}^2-x\left(1-y^2\right)\psi_{,y}{}^2-2y\left(x^2-1\right)\psi_{,x}\psi_{,y}\right], \tag{1.19}$$

$$\gamma_{,y}=\frac{1-y^2}{x^2-y^2}\left[y\left(x^2-1\right)\psi_{,x}{}^2-y\left(1-y^2\right)\psi_{,y}{}^2-2x\left(1-y^2\right)\psi_{,x}\psi_{,y}\right]. \tag{1.20}$$

егер бұндағы ψ метрикалық функциясы белгілі болса, онда γ функциясы квадраттық өрнекпен есептелетінін көруге болады. Егер біз ψ асимптоталық жазық болуын талап етсек, онда

$$\lim_{x\to\infty}\psi\left(x,y\right)=0, \tag{1.21}$$

$$\gamma=\left(x^2-1\right)\int_{-1}^{\infty}\left(x^2-y^2\right)^{-1}\left[y\left(x^2-1\right)\psi_{,x}{}^2-y\left(1-y^2\right)\psi_{,y}{}^2+2x\left(1-y^2\right)\psi_{,x}\psi_{,y}\right]dy, \tag{1.22}$$

квадратураны пайдаланып асимптоталық жазық функцияны (1.22) теңдеу түрінде интегралдап табуға болады[9, 740-742 б.].

Дегенмен, бұл жерде шешімдерді тікелей табу емес, қайта белгілі шешімдерді пайдаланып жаңа шешімдерді алуға болатынын баса айтуға болады. Айталық, жоғарыдағы теңдеулер үшін ψ_0 және γ_0 жүйенің шешімі белгілі болсын делік. Онда, кез келген δ тұрақтысы үшін $\psi=\delta\cdot\psi_0$ және $\gamma=\delta^2\cdot\gamma_0$ өрнектері де жоғарыдағы теңдеулер жүйесінің шешімі бола алатынын көреміз. Яғни, жоғарыдағы өріс теңдеулеріне жаңа тұрақтыларға байланысты шешімдерді қойсақ та өріс теңдеулерінің құрылымы өзгермеді.

Бұл әдіс, вакуумдық жағдайда, берілген шешімдерді пайдаланып жаңа шешімдерді алу үшін пайдаланылатын Зипой-Вурхис (Zipoy-Voorhees) трансформациясы деп табылады. Ең қарапайым мысал ретінде, сыртқы Шварцшильд шешімінен генерациялауға болады $\left(\delta=1\right)$:

$$\psi = \frac{\delta}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}, \tag{1.23a}$$

$$\gamma = \frac{\delta^2}{2}\ln\frac{x^2-1}{x^2-y^2}, \tag{1.23b}$$

Бұл метрика әдебиеттерде δ метрикасы ретінде белгілі. Бұл метрика тұрақты δ мәнімен вакуумдық Шварцшильд шешімін Зипой-Вурхис түрлендіруін қолданып генерациялау арқылы алынғанын.

Егер, цилиндрлік координаталарды, яғни мына түрлендірулермен

$$\rho = \sigma\sqrt{\left(1-y^2\right)\left(x^2-1\right)}, \quad z = \sigma xy, \tag{1.24}$$

жоғарыдағы (1.17) сызықтық элементті қайта жазсақ, онда мына түрге келеді

$$ds^2 = e^{2\psi}dt^2 - e^{-2\psi}\left[e^{2\gamma}\left(d\rho^2 + dz^2\right) + \rho^2 d\varphi^2\right]. \tag{1.25}$$

Сонда, вакуумдық өріс теңдеулерін келесідей көрсетуге болады

$$\psi_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\psi_{,\rho} + \psi_{,zz} = 0, \tag{1.26}$$

$$\gamma_{,\rho} = \rho\left(\psi_{,\rho}{}^2 - \psi_{,z}{}^2\right), \tag{1.27a}$$

$$\gamma_{,z} = 2\rho\psi_{,\rho}\psi_{,z}. \tag{1.27b}$$

Бұл жерде Вейлдің жалпы шешімін келесідегідей көрсетуге болады [2, б.305].

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}P_n\left(\cos\theta\right), \quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}, \tag{1.28}$$

$$\gamma = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n a_m\left(n+1\right)\left(m+1\right)}{\left(n+m+2\right)\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{n+m+2}{2}}}\left(P_n P_m - P_{n+1}P_{m+1}\right), \tag{1.29}$$

Мұнда $a_n\left(n=0,1,...\right)$ ерікті тұрақтылар, ал $P_n\left(\cos\theta\right)$ Лежандер полиномының n – дәрежесін көрсетеді. Зипой-Вурхис метрикасын цилиндрлік координаталардағы (1,28) дың шексіз қосындысы (1,23) пен біріктірілетіндей a_n тұрақтыларды таңдау арқылы алуға болады.

Сфералық координаттар, қарапайым түрде төмендегі түрлендірулермен анықталады:

$$\rho^2=\rho^2\left(r^2-2\sigma r\right)\sin^2\theta, \qquad z=\left(r-\sigma\right)\cos\theta, \tag{1.30}$$

Осылайша, (1.17) метрика мынадай түрге келеді.

$$ds^2=\Delta^{\delta}dt^2-\Delta^{1-\delta}\left[\Sigma^{1-\delta^2}\Delta^{\delta^2-1}\left(\frac{dr^2}{\Delta}+r^2d\theta^2\right)+r^2\sin^2\theta d\varphi^2\right], \tag{1.31}$$

$$\Delta=1-\frac{2\sigma}{r}, \qquad \Sigma=1-\frac{2\sigma}{r}+\frac{\sigma^2}{r^2}\sin^2\theta. \tag{1.32}$$

Бұл метриканың Ньютондық шегін талдау - оның тұрақты тығыздықтағы көзі бар $z_1=-\sigma$ ден $z_2=\sigma$ дейін ось бойымен біркелкі таралған жұқа стерженьге δ сәйкес келетінін көрсетеді. Әдебиеттерде әдетте γ тұрақты мәннің орнына басқа δ тұрақты мәні пайдаланылады, сондықтан, кейбір әдебиеттерде (1.31) көрсетудегі Зипой-Вурхис метрикасы γ -метрика ретінде белгілі. Сонымен, Эйнштейннің өстік симметриялы вакуумдық өріс теңдеулерінің Вейлдің класындағы қызықты дәл шешімдер δ метрикасы немесе γ -метрикасы сайып келгенде әр түрлі атпен белгіленіп келген бірдей шешімдер екенін көреміз.

1.2 Статикалық квадрупольдық метрика және оның қасиеттері

Егер Шварцшильд шешімін пайдаланып, жоғарыдағы тұрақты шаманың орнына $\delta=1+q$ белгілеуі арқылы Зипой-Вурхис түрлендіруін жасаса, мынадай метриканы алуға болады.

$$ds^2=\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{1+q}dt^2-\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-q}\left[\left(1+\frac{m^2\sin^2\theta}{r^2-2mr}\right)^{-q(2+q)}\right.$$

$$\times\left(\frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}}+r^2d\theta^2\right)+r^2\sin^2\theta d\phi^2\Bigg]. \qquad (1.33)$$

Бұл метрика массаның таралу деформациясын сипаттайтын қосымша q параметрі бар Шварцшильд шешімінің ең қарапайым жалпылауын көрсетеді [26]. Нақтылап айтсақ, мұны Герохтың инвариантты мультипольдік моменттерін есептеу арқылы анық көрсетуге болады [27, 28]. Төменгі дәрежелі массалық мультипольдік моменттері M_n $n=0,1,\ldots$ өрнек арқылы анықталады

$$M_0=(1+q)m\,,\quad M_2=-\frac{m^3}{3}q(1+q)(2+q)\,, \qquad (1.34)$$

мұнда, жоғары ретті моменттер M_0 және M_2 шамаларына толығымен пропорционалды және олардың көмегімен қайта жазылады. Сәйкесінше, M_2 массаның квадрупольдық моментін анықтайды және шешімдердің мультипольдік моменттерін анықтайтын жалғыз тәуелсіз параметр болып табылады. Шварцшильд кеңістігіндегідей, шекті жағдайда, яғни $q=0$ болғанда тек монополь $M_0=m$ ғана қалады. $m=0$ және $q\neq 0$ болғанда барлық моменттер жойылып кетеді, бұл массалық үлестірудің жоқтығын және кеңістік уақытының жазық болатыны білдіреді. Минковский метрикасына сәйкес келетін $q\to -1$ шекті жағдайда да солай. Барлық тақ мультипольдік моменттер нөлге тең, себебі шешім экваторлық жазықтыққа қатысты симметриялыққа ие $\theta=\pi/2$.

Деформация квадрупольдық моментпен M_2 сипатталады, ол созылыңқы өріс көзі үшін оң, ал сығылған өріс көзі үшін теріс. Яғни бұндағы q параметрдің мәні оң немесе теріс болуы мүмкін екенін білдіреді. Гравитациялық көздің M_0 жалпы массасы оң болуы керек болғандықтан, m-нің оң мәндері үшін $q>-1$, ал m теріс мәндері үшін $q<-1$ болады. Бұл метриканы M_2 оң немесе теріс квадруполь моменті бар, статикалық M_0 оң массаның сыртқы гравитациялық өрісін сипаттау үшін пайдалануға болады деген қорытындыға келеміз. Массалық моменттердің гравитациялық өріске әсерін q шамасының айқын мәніне байланысты. Сондықтан, оның физикалық мәнін ашып көрсету үшін (1.33) метриканы q метрикасы деп аталған.

Кречман скалярын есептеу арқылы кеңістік-уақыттың алуан түрдегі қисықтық ерекшеліктерін зерттеуге болады. Оны кейде Риман тензорының квадраты деп те атайды. Кречман скалярының мәні шексіз болатын аймақтар, ол кеңістікте сингулярлықтың бар екенін көрсетеді. Бұндағы сингулярлықтар – математикалық өрнектердегі қисықтық шексіз болатын нүктелер. Осылайша, Кречман скаляры кеңістік-уақыттың экстремальды аймақтарын анықтауға

көмектеседі. Кречман скалярының жоғары мәндері күшті гравитациялық өрістерге сәйкес келеді. Бұл скалярлық шама қара құрдымдар мен нейтрондық жұлдыздар сияқты массивтік нысандардың жанындағы гравитациялық әсерлерді түсіну үшін өте маңызды. Осылайша, олар метрика туралы координаттық-инвариантты ақпаратты тікелей береді.

Кречман скаляры мына түрде есептелінеді

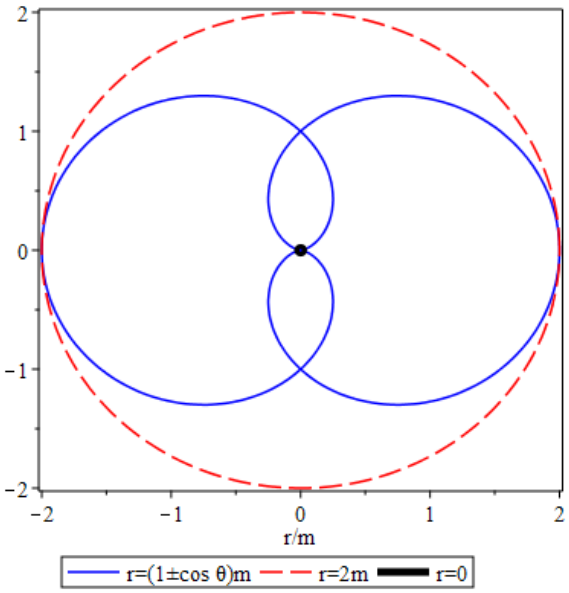
$$K = R_{\mu\nu\lambda\tau}R^{\mu\nu\lambda\tau} = \frac{16m^2(1+q)^2}{r^{4(2+2q+q^2)}}\frac{(r^2-2mr+m^2\sin^2\theta)^{2(2q+q^2)-1}}{(1-2m/r)^{2(q^2+q+1)}}L(r,\theta), \quad (1.35)$$

Мұндағы белгілеу

$$L(r,\theta) = 3(r-2m-qm)^2(r^2-2mr+m^2\sin^2\theta),$$

$$+m^2q(2+q)\sin^2\theta\cdot[m^2q(2+q)+3(r-m)(r-2m-qm)]. \quad (1.36)$$

Бұл өрнек арқылы кеңістік-уақыт ерекшеліктерін зерттеуге болады. Алдымен, жоғарыдағы өрнектің дербес жағдайларында, тек $q=-1$ және $m=0$ болғанда сингулярлық жоқ екенін көреміз. Нақтылап айтсақ, жоғарыда айтылғандай, бұл жағдайлар, массасыз жазық кеңістік-уақытқа сәйкес келеді.



Сурет 1.1 – Квадрупольдық жалаңаш сингулярлық кеңістік-уақытының геометриялық құрылымы

Кез келген q және m мәндері үшін $r\to 0$ де сингулярлық бар. Дербес жағдайларда, m теріс мәндері үшін де бұл кеңістік-уақыттың жалғыз ерекше нүктесі табылады. Ал, $m>0$ болғанда $2q(2+q)<1$ дейінгі диапазонда

$r^2 - 2mr + m^2 \sin^2\theta = 0$ шартын қанағаттандыратын r мәндері үшін сингулярлықтар бар, яғни бұл сингулярлық $r = 2m$ радиусы бар сфераның ішінде орналасқан.

Атап айтқанда, $r = 2m$ радиусында сингулярлық пайда болады, ол (1.33) метрикаға сәйкес, сонымен қатар, бұл радиуста уақыттық Киллинг тензорының нормасы жойылатындай көкжиекке айналады. $r = 2m$ гипербетінің сыртында ешқандай қосымша көкжиек жоқ, бұл $r = 2m$ бетімен сипатталатын сферада орналасқан сингулярлықты көрсетеді. Шварцшильд шешіміндегідей сингулярлықты $q=0$ кезінде $r_s = 2m$ -мәнге тең, инварианттық масса үшін ең сыртқы сингулярлықты білдіреді, сонымен қатар, $r_s = 2M_0 / (1+q)$ шамасына тең ішкі сингулярлықтары бар. Ондағы себеп, астрофизикалық ықшам объектілерде квадрупольдық момент аз болады, басқаша айтқанда, $q << 1$ болады [29, 30].

1.3 q- метрика кеңістік-уақытындағы геодезиялық қозғалыстар

Жоғарыда айтылғандай, нақты астрофизикалық объектілерде квадрупольдық шаманың аз болатынын ескерсек, онда біршама нақты объектілер үшін сфералық симметриядан аз шамада ауытқуды ескеретін өстік симметриялы метриканы пайдалануға тура келеді. Осы тұрғыдан, еркін параметрдің кеңістік-уақыттық құрылымына әсерін қарастыру маңызды. Геодезиялық сызықтар қисық беттердің маңызды сипаттамасы болып табылады. Статикалық және осьтік-симметриялық кеңістік-уақытты білдіретін $q-$ метрикалық өрісіндегі геодезиялық қозғалысты зерттеу - ол q-тәуелсіз параметрінің осы кеңістік-уақыттың қасиетіне қалай әсер ететінін түсінуге көмектеседі. Сондықтан төменде өстік симметриялы вакуумдық дәл шешім болып есептелетін q- метрика кеңістік-уақытындағы геодезиялық қозғалыстар қарастыралады. Алынған нәтижелер, келесі бөлімдерде қарастырылатын, мардымсыз деформацияланған кеңістік-уақыттың қасиеттерін салыстырып зерттеулер үшін пайдаланылады.

Геодезиялық қозғалыс теңдеулері

ЖСТдағы сынақ бөлшектердің қозғалысы мына түрдегі геодезиялық теңдеумен сипатталады [31, 32]:

$$x^{\alpha}_{,\tau\tau} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} x^{\beta}_{,\tau} x^{\gamma}_{,\tau} = 0, \tag{1.37}$$

Мұнда $x^{\alpha} = t, r, \theta, \varphi$, төр өлшемді жылдамдық $dx^{\beta} / d\tau = x^{\alpha}_{,\tau}$, және Кристоффель символдарын (1.33) метрикалық тензормен өрнектесек:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left(\partial_{\nu} g_{\rho\sigma} + \partial_{\rho} g_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\nu\sigma} \right), \tag{1.37a}$$

бұндағы $g_{\mu\nu}$ (1.33) өрнектегі кеңістік-уақыт метрикасы.

Массасы, М бөлшектің 4-импульсі $p^{\alpha} = Mx^{\alpha}_{,\tau}$ сондай-ақ, 4-жылдамдық келесідей нормаланған:

$$u^{\alpha}u_{\alpha} = -1\,. \tag{1.38}$$

(1.38) теңдеуін ескере отырып, (1.37) өрнектен қозғалыстың теңдеулерін төмендегідей түрге келтіруге болады:

$$t_{,\tau\tau} + (1+q)\frac{2m}{r(r-2m)}t_{,\tau}r_{,\tau} = 0\,, \tag{1.39}$$

$$\begin{aligned} &r_{,\tau\tau} + (1+q)\frac{m(r-2m)^{1+2q}}{r^{3+2q}}\frac{t_{,\tau}^2}{k_2} - m\Big\{(m-r)\Big[m\big(1+q(3+q)\big)-(1+q)r\Big] \\ &-m\Big[\big(1+q(3+q)\big)+q(2+q)r\Big]\cos^2\theta\Big\}\frac{r_{,\tau}^2}{k_2} + m^2q(2+q)(2m-r)\frac{r\cdot\sin 2\theta\cdot r_{,\tau}\theta_{,\tau}}{2k_1} \\ &-(2m-r)\Big\{(m-r)\Big[m^2(1+q)(2+q)-m(2+q)r+r^2\Big] \end{aligned} \tag{1.40}$$

$$-m^2(1+q)\Big\}\Big[m(2+q)-(1+q)r\Big]\cos^2\theta\frac{\theta_{,\tau}^2}{k_1} + \Big[m(2+q)-r\Big]\sin^2\theta\frac{\varphi_{,\tau}^2}{k_2} = 0\,,$$

$$\begin{aligned} &\theta_{,\tau\tau} - m^2q(2+q)\cos\theta\sin\theta\frac{t_{,\tau}^2}{k_2} + \Big\{2m^2(1+q)\Big[m(2+q)-(1+q)r\Big]\cos^2\theta \\ &-2(m-r)\Big[m^2(1+q)(2+q)-m(3+q)r+r^2\Big]\Big\}\frac{r_{,\tau}\varphi_{,\tau}}{k_1} \\ &-\sin 2\theta\left\{m^2q(1+q)(2m-r)r\frac{\theta_{,\tau}^2}{2k_1} - \frac{\varphi_{,\tau}^2}{2k_2}\right\} = 0, \end{aligned} \tag{1.41}$$

$$\varphi_{,\tau\tau} + \frac{2(mq+2m-r)}{r(2m-r)}r_{,\tau}\varphi_{,\tau} + \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}\theta_{,\tau}\varphi_{,\tau} = 0\,, \tag{1.42}$$

мұндағы k_1 және k_2 белгілеулері:

$$k_1 = r\left[m^2\cos^2\theta - \left(m-r\right)^2\right]\left(2m-r\right), k_2 = \left\{\frac{r\left[m^2\cos^2\theta - \left(m-r\right)^2\right]}{\left(2m-r\right)}\right\}^{-q(2+q)} \quad .(1.43)$$

Жалпы жағдайда бұл теңдеулер интегралданбайды, бастапқы немесе шекаралық шарттарымен қоса теңдеулерді сандық әдістермен зерттеуге болады.

Алайда, мәселені сапалық жақтан біршама нақты сипаттау үшін, кеңістік-уақыттың симметриясын ескеріп, экваторлық жарықтықты қарастыру есепті біршама оңайлатады.

Экваторлық жазықтықтағы қозғалыс

Квадрупольдің әсерін түсіну үшін (1.33) өрнектегі q – метрикамен сипатталған, сынақ бөлшектің қозғалысын қарастыруға болады. q метрикасы $\theta = \pi/2$-ге қатысты симметриялы болғандықтан, осы жазықтықта қозғала бастаған кезкелген геодезиялық қозғалысы шексіз уақыт бойы осы жазықтықта қалады. Сондықтан, бөлшектің орбитасы осы жазықтықта болатындай етіп координаталар жүйесін таңдасақ, яғни, θ координатаны $\pi/2$-ге тең, осылайша метрика төмендегі шарттар арқылы анықталады:

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \theta_{,\tau} = 0, \tag{1.45}$$

мұндағы τ – бөлшектің меншікті уақыты. Соңында, (1.39), (1.40), (1.41), (1.42) теңдеулерден экваторлық жазықтықта мынадай түрге ие болады:

$$t_{,\tau\tau} + \left(1+q\right)\frac{2m}{r\left(r-2m\right)}t_{,\tau}r_{,\tau} = 0. \tag{1.46}$$

Және геодезиялық қозғалыстың радиалды теңдеуі мына түрге ие болады

$$r_{,\tau\tau} + \left(1+q\right)\frac{m\left(r-2m\right)^{1+2q}}{r^{3+2q}}\frac{t_{,\tau}^2}{k_2} - m\left\{\left(m-r\right)\left[m\left(1+q\left(3+q\right)\right) - \left(1+q\right)r\right]\right.$$

$$\left. -m\left[\left(1+q\left(3+q\right)\right) + q\left(2+q\right)r\right]\cos^2\theta\right\}\frac{r_{,\tau}^2}{k_2} + \left[m\left(2+q\right) - r\right]\frac{\sin^2\theta\cdot\varphi_{,\tau}^2}{k_2} = 0. \tag{1.47}$$

(1.45) өрнекті ескере отырып, (1.41) теңдеулер енді мына түрге келеді

$$\theta_{,\tau\tau} = 0, \tag{1.48}$$

Сондай-ақ, азимутальды компонент төмендегідей болады:

$$\varphi_{,\tau\tau} + \frac{2\left(mq + 2m - r\right)}{r\left(2m - r\right)} r_{,\tau}\varphi_{,\tau} = 0\,. \qquad (1.49)$$

Жоғарыдағы теңдеулердің математикалық құрылымы күрделі, жалпы жағдайда шешімдерді аналитикалық түрде табу қиын, алайда, заманауи есептеу құралдарының көмегімен қозғалыстарды сандық әдістермен зерттеуге болады. Maple программасын пайдаланып тензорлық есептеулер және сандық зерттеулер жүргізілді. Maple программасы жалпы салыстырмалылық теориясында және геодезиялық қозғалысты зерттеуде ыңғайлы көптеген дайын құралдары бар, сандық есептерді есептеуге және графикалық түрде сипаттауға арналған кең ауқымды және алуан түрлі мүмкіндіктері бар[33-42]. Әрі қарай есептеулерді жеңілдету үшін біз бірлік массаны $m = 1$ және орталық сингулярлықтың радиусын $r_c = 2m = 2$ деп геометриялық бірліктер жүйесін пайдаланамыз.

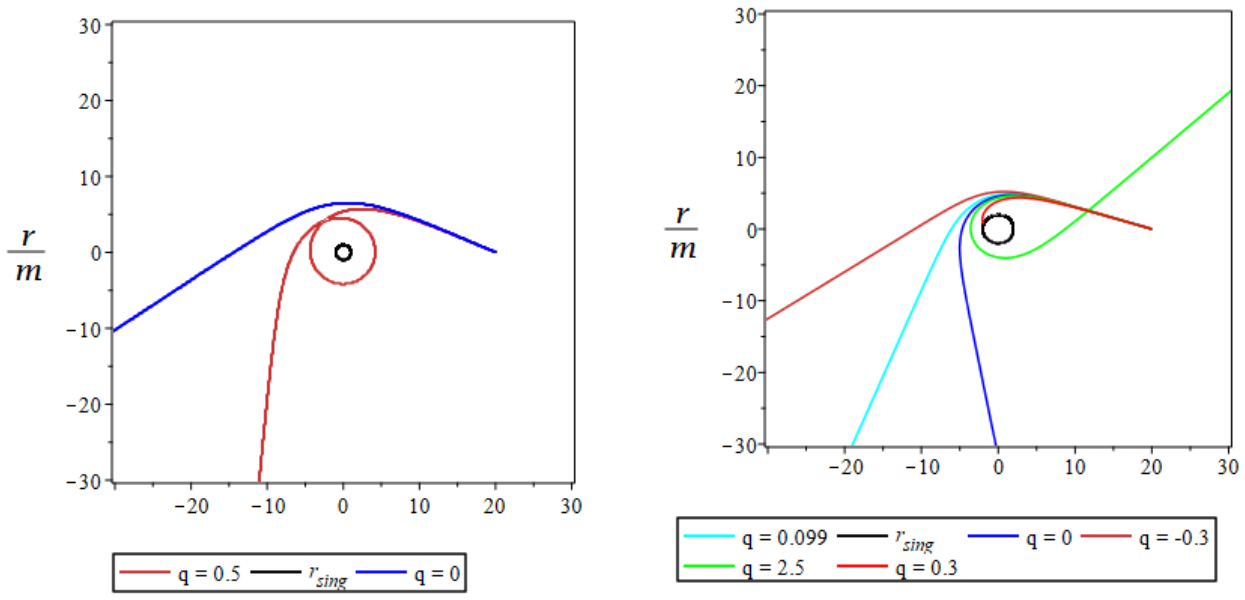
Квадруполь параметрдің әртүрлі мәндері үшін геодезияның кейбір мысалдары 1.2 –1.4 - суреттерде көрсетілген, мұнда траекторияларды бағалауға ыңғайлы болу үшін барлық радиалды координатты *r/m* ретінде белгілеп алу бізде оңтайлы болады.

1.2 – суретте көрсетілгендей, квадрупольдің әсерінен бастапқы радиалды жылдамдықтары нөлге тең емес Шварцшильд орбиталарын қарастырамыз. Таңдап алған бастапқы радиалды және бұрыштық жылдамдықтардың нәтижесінде, барлық жағдайда сынақ бөлшектері жалаңаш сингулярлықтың гравитациялық өрісінен сыртқа қарай қашып құтыла алатынын көреміз. Квадрупольдің шамасы бөлшектің шексіздікке қашатын бағытын ғана анықтайды.

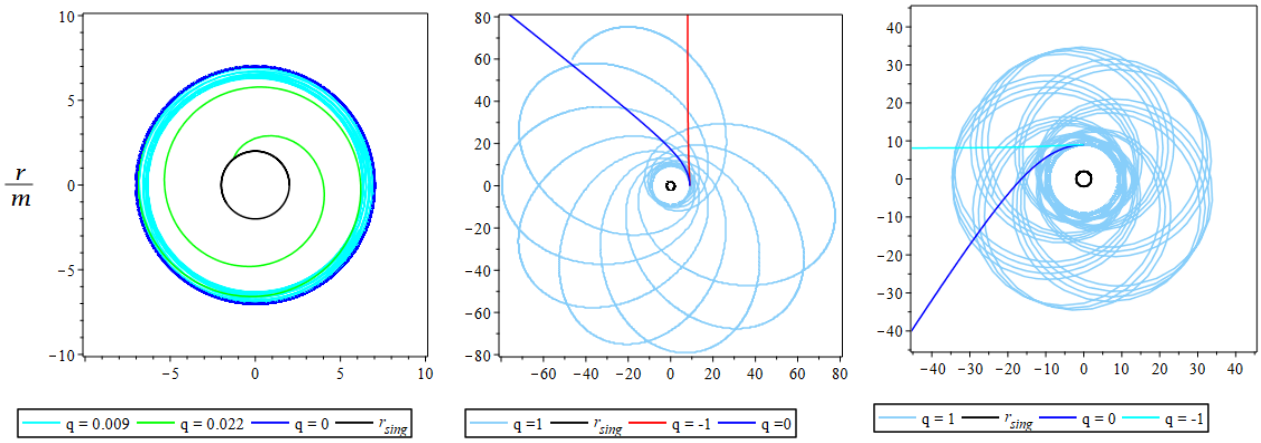
1.3-суретте квадрупольдің бастапқы радиалды жылдамдығы нөлге тең, тұйықталмаған Шварцшильд орбиталарына қалай әсер ететіні қарастырылған. Алдымен квадруполь (сол жақтағы панель) әсерінен тұрақты дөңгелек Шварцшильд геодезиясының өзгеруі зерттелді.

Квадрупольдің аз мәні үшін (q = 0,009) геодезиялық орталық сингулярлыққа қарай баяу жылжиды және соңында бастапқы Шварцшильд радиусынан кіші радиусы бар тұрақты дөңгелек орбитаға түседі. Орталық және оң жақтағы графиктер, квадрупольдық моменттің бірдей мәндерінде қарастырылған, бірақ бастапқы бұрыштық жылдамдықтар φ(0) әртүрлі.

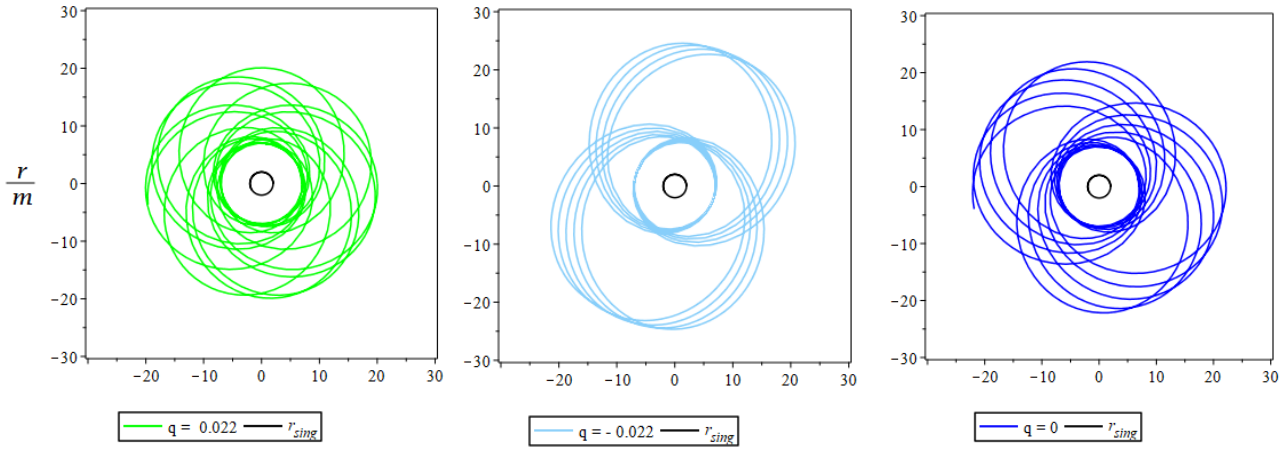
Екі жағдайда да, сынақ бөлшектері әртүрлі перигелийлік ығысуларымен тұйықталған орбиталарда қозғалады. Осы траекториялардың сипатынан, квадрупольдің тұйықталмаған Шварцшильд траекторияларын тұйықталған траекторияларға айналдыруға қабілетті екенін көреміз.



Сурет 1.2 – Бастапқы радиалды жылдамдығы нөлге тең емес Шварцшильд орбиталарына квадрупольдің әсері $r_{,\tau}(0) \neq 0$. Бастапқы нүкте $\varphi(0) = 0$ және $r(0) = 20$ екі сызба үшін де бірдей. Бастапқы жылдамдықтар $r_{,\tau}(0) = -2$ және $\varphi_{,\tau}(0) = 0.04305$ (сол жақ); $r_{,\tau}(0) = -2.5$ және $\varphi_{,\tau}(0) = 0.039$ (оң жақ)



Сурет 1.3 – Бастапқы радиалды жылдамдығы нөлге тең емес Шварцшильд орбиталарына квадрупольдің әсері $r_{,\tau}(0) = 0$. Бастапқы шарттар $\varphi(0) = \pi / 2$, $r(0) = 7$, $\varphi_{,\tau}(0) = 0.07145$ (сол жағы); $\varphi(0) = 0$, $r(0) = 9$, $\varphi_{,\tau}(0) = 0.075$ (орта); $\varphi(0) = \pi / 2$, $r(0) = 9$, $\varphi_{,\tau}(0) = 0.07145$ (оң жағы)



Сурет 1.4 – Бастапқы радиалды жылдамдығы нөлге тең $r_{,\tau}(0)=0$ Шварцшильдтің тұйықталған орбиталарына квадрупольдің әсері. Бастапқы шарттар барлық траекториялар үшін $r(0)=7, \varphi(0)=0, r'(0)=0, \varphi'(0)=0.08$, $r_{\text{sing}}=m=2$

1.4-суретте бастапқы радиалды жылдамдығы нөлге тең және бастапқы бұрыштық жылдамдықтар үшін бірдей нөлдік емес мәні бар квадрупольдің әсерінен Шварцшильдтің тұйықталған орбиталары қарастырылған. Сол жақ панельде Шварцшильд геодезиясы көрсетілген, ал орталық және оң жақ сызбалар сәйкесінше квадрупольдің белгілі бір теріс және оң мәніне арналған. Бұл жағдайларда, квадрупольдің тұйықталған геодезиялық орбиталар сипатына әсер етпейтінін көреміз. Дегенмен, ол траекторияның геометриялық құрылымын түбегейлі өзгерте алады. Бұдан, біз жалаңаш сингулярлықтың квадрупольдық шамасы әрқашан сынақ бөлшектерінің қозғалысына әсер ететінін көреміз. Траекторияларда пайда болған өзгерістер квадрупольдің нақты мәніне байланысты әртүрлі болуы мүмкін.

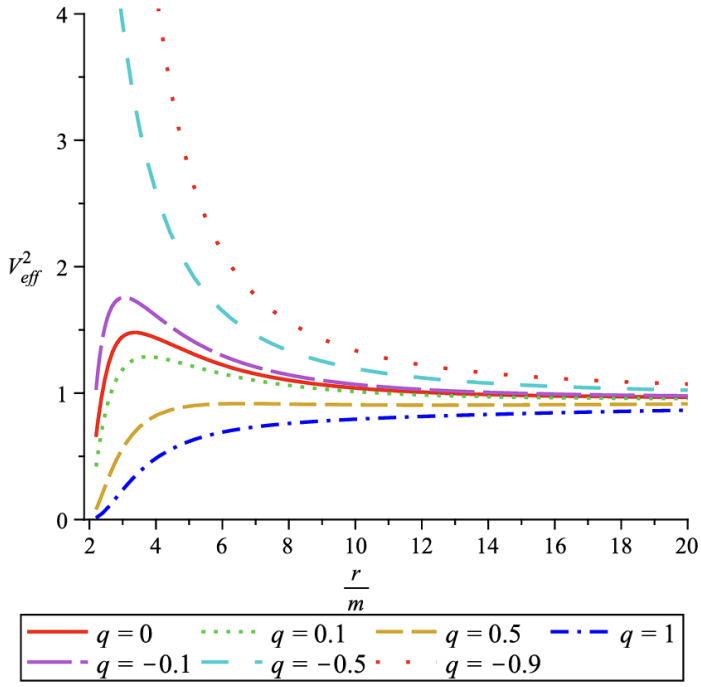
Жалпы алғанда, квадрупольдық параметр геодезияның құрылымын толығымен өзгерте алатынын көреміз, сондықтан, геодезияның параметрлерін өлшеу арқылы квадрупольді анықтауға мүмкіндік бар.

Экваторлық жазықтықтағы, дөңгелек орбиталарды аналитикалық түрде зерттеуге болады. Бұл жағдайда, дөңгелек орбиталардың пайда болу шарты бойынша $r_{,\tau}=0$, сынақ бөлшектің эффективті потенциалдағы қозғалысына тең болады [43].

Квадрупольдық параметр эффективті потенциалдың құрылымына тікелей әсер етеді, оны 1.5-суреттен көруге болады.

$$V_{eff}^2(r,q)=\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{q+1}\left[\frac{l^2}{r^2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{q}+\varepsilon\right]. \qquad (1.50)$$

Салыстыру үшін Шварцшильд метрикасының эффективті потенциалы қоса сызылған.



Сурет 1.5 – Экваторлық жазықтықтағы, квадрупольдық параметрдің әртүрлі мәндері үшін радиусқа байланысты дөңгелек геодезияның тиімді потенциялы. Тұрақтының шамасы $l^2 = 30$

Дөңгелек орбитадағы сынақ бөлшектің бұрыштық импульсінің нақты мәнін $V_{eff,r}^2 = 0$ шартынан алуға болады. Тікелей есептеу мынаны береді:

$$l^2 = \frac{m(q+1)\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-q} r^2}{r-(3+2q)m}, \tag{1.51}$$

Дөңгелек орбиталардың радиусы шектелген жағдайда бірден мынадай шартты аламыз

$$r_c > m(3+2q). \tag{1.52}$$

Бұл радиус оң мәнді квадруполь параметрі үшін Шварцшильд радиусынан үлкен.

Дегенмен, q-дің теріс мәндері үшін орбиталардың радиусы Шварцшильд мәнінен аз және негізінен $r = 2m$-де орналасқан сыртқы сингулярлыққа барынша жақын болады. $r_c = m(3+2q)$ шекті жағдайда орбита жарық тәрізді болады.

Сонымен қатар, шеңбер бойымен қозғалатын сынақ бөлшектің энергиясын былай көрсетуге болады:

$$E^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{q+1}\left[\frac{m(q+1)}{r - m(3+2q)} + 1\right], \tag{1.53}$$

Энергияның бұл мәндері (1,52) де рұқсат етілген радиустар шегінде ғана оң болады. Дөңгелек орбиталардың параметрлерін толық сипаттау үшін олардың $\Omega(r)$ бұрыштық жылдамдығы мен $T(r)$ периодын есептеуге болады, соңында мына өрнектер шығады:

$$\Omega(r) = \varphi_{,\tau} = \frac{1}{r}\left[\frac{m(1+q)\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}{r - m(3+2q)}\right]^{1/2}, \tag{1.54}$$

$$T(r) = \int \frac{i}{\varphi_{,\tau}} d\varphi = 2\pi r^{3/2}\left[\frac{m(1+q)\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}{r - m(3+2q)}\right]^{1/2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-q}, \tag{1.55}$$

Қозғалыстың орнықтылық қасиеттерін де қарастыруға болады. Атап айтқанда, соңғы тұрақты дөңгелек орбита тиімді потенциалдың (1.50) иілу нүктелерімен, яғни теңдеудің нөлдерімен анықталады.

$$V^2_{eff,rr} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{q-1}\frac{m(1+q)\left(r^2 - 8mr - 6qmr + 4q^2m^2 + 14qm^2 + 12m^2\right)}{r^4\left[r - m(3+2q)\right]}, \tag{1.56}$$

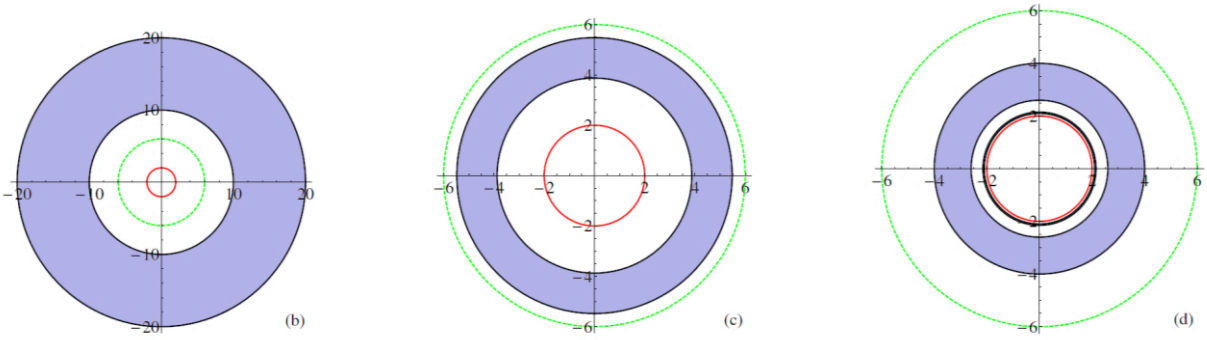
Бұл өрнекте (1.51) өрнектегі дөңгелек орбитаның бұрыштық импульсінің мәнін орнына қойдық. Есептеулерден кейін, соңғы дөңгелек орбиталардың радиустарын аламыз

$$r^{\pm}_{lsco} = m\left(4 + 3q \pm \sqrt{5q^2 + 10q + 4}\right), \tag{1.57}$$

Бұл радиустар q-дің барлық оң міндері үшін және q-дің барлық рұқсат етілген мәндері үшін сыртқы сингулярлықтан тыс жатады. l^2-ның бұрыштық импульсі оң болатын минималды мәнді білдіреді. Осылайша бірнеше аймаққа

бөліп қарастыруға болады. I $q \in \left(\infty, -0.5\right]$ үшін, II $q \in \left(-0.5, -1+1/\sqrt{5}\right]$ үшін және III $q \in \left(-1+1/\sqrt{5}, -1\right]$ үшін. Әртүрлі аралықтарды анықтау үшін қолданылатын q-дің мәндері $r_{-} = r_c\left(q = -0.5\right)$ және $r_{+} = r_{-}\left(q = -1+1/\sqrt{5} \approx -0.5527\right)$ шарттарынан туындайды.

Шешімдердің орнықтылығын егжей тегжейлі талдау біршама қызықты мәліметтерді береді[44]. Бұл жерде, квадрупольдық параметрдің кейбір рұқсат етілген міндер аумағында дөңгелек орбиталар тұрақты болатын, яғни $V^2_{eff,rr} > 0$ шарты орындалатын жағдайда аккрециялық дискілер пайда болатын көруге болады. Бақылау тұрғысынан, бұл дискінің ішкі радиусын өлшеу арқылы квадрупольдің шамасын анықтауға болатынын білдіреді. Ең кіші дискінің ішкі радиусы $r^{+}_{lsco}\left(q = -0.5\right) = 3m$ мәніне сәйкес келеді, ал сыртқы радиусты шексіздікке дейін ұзартуға болады. II $q \in \left(-0.5, -1+1/\sqrt{5}\right]$ нүктелері ішінде орналасқан аралықта r^{+}_{lsco} және r^{-}_{lsco} екі нөл шешімдері $V^2_{eff,rr}$ екінші туындысы теріс болады. Бұл дөңгелек орбиталар осы аралықта тұрақсыз дегенді білдіреді.

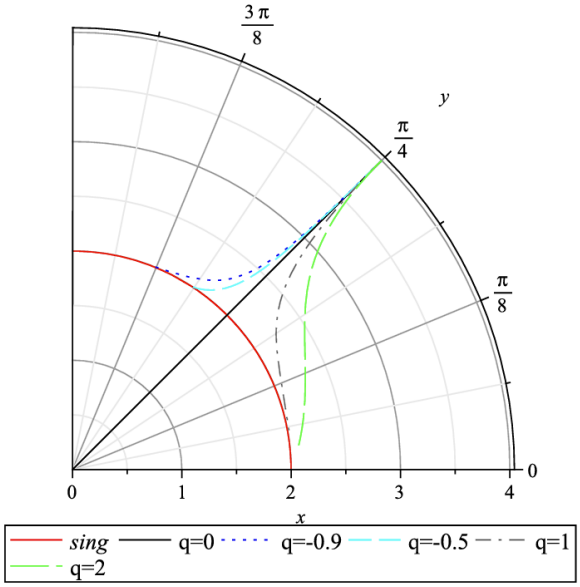


Сурет 1.6 – (a) квадрупольдық параметрдің функциясы ретінде сызылған соңғы тұрақты дөңгелек орбитаның радиустары. Критикалық радиустан $r_c = m(3+2q)$ төменгі мәндерде қозғалысқа рұқсат етілмейді. Сыртқы сингулярлық $r_{\sin g} = 2m$. Аккрециялық дискілер оң q мәндері үшін (b) суретте көрсетілген, q-дің $-0.5 > q > 0$ мәндері үшін (c) суретте көрсетілген және q=-0.52 мәні үшін (d) суретте көрсетілген

III аралықта $q \in \left(-1+1/\sqrt{5}, -1\right]$, соңғы дөңгелек тұрақты орбиталар болмайды. Негізінде бұл аумақта сыртқы $r = 2m$ сингулярлықтан бастап барлық

дөңгелек траекторияларға рұқсат етіледі. Жалаңаш сингулярлықтың осындай айналасындағы аккрециялық дискілер сингулярлықтан бастап шексіздікке дейін созылатын үздіксіз құрылымға ие болады.

Шварцшильд кеңістігінде сынақ бөлшектердің еркін түсуін бейнелейтін радиалды геодезиялар кеңістіктегі бастапқы нүктені координаталар басындағы сингулярлықпен байланыстыратын түзу сызықтар болып табылады. Сондықтан радиалды геодезияны q метрикамен сипатталған кеңістікте квадрупольдің әсер ету шамасын бағалау үшін зерттеуге пайдалы. Бұрыштық импульсі $l=0$ жойылатын кезінде сынақ бөлшектерінің еркін түсуін қарастыруға болады.



Сурет 1.7 – Бастапқы нүктесі $r=4(m=1)$ және $\theta=\pi/4$-те орналасқан сынақ бөлшектерінің еркін түсуі. сингулярлық $r_{\sin g}=2m$ де және Шварцшильд кеңістік уақыты үшін радиалды геодезия да салыстыру үшін көрсетілген

Сонымен қатар, полярлық жазықтық $\theta=const$.міндетті түрде геодезиялық жазықтық емес екенін ескеруіміз керек. Бұл радиалды геодезия теңдеуі (1.41) теңдеуімен бірге қарастырылады дегенді білдіреді, яғни θ координатасы бойынша эволюциялық қозғалыс бар болуы мүмкін. Осы екі дифференциалдық теңдеулерді интегралдау нәтижесін 1.7-суретте көрсетілген. Теріс квадрупольдық параметрі бар өріс көздері үшін (сығылған көздері) геодезия бастапқы θ=¼π бұрышынан симметрия өсіне қарай ауытқиды. Оң квадрупольдық (созылған дене) жағдайында ауытқу өріс көзінің экваторлық жазықтығына қарай болады.

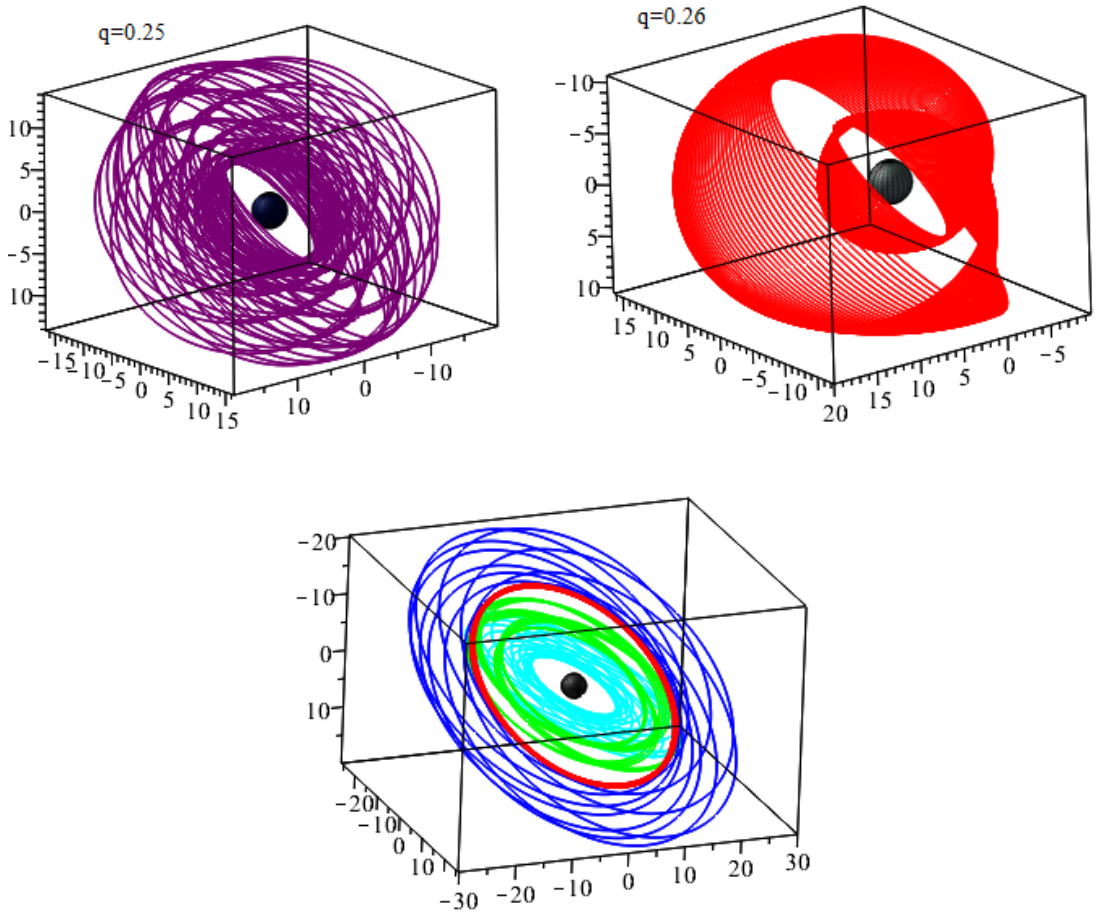
Бұл нәтиже біздің физикалық күтуімізге сәйкес келеді. Шынында да, созылған өріс көздері экваторлық жазықтықта үлкенірек, сондықтан экватордағы массалық тығыздық үлкенірек гравитациялық әсерді туғызады деп күтуге болады. Сығылған денелер жағдайында бірдей интуитивті пайымдау симметрия өсі үшін жарамды. Бұл нәтиже гравитациялық көздің квадрупольдық моментін анықтайтын q параметрін мағынасын аша түседі.

Траекторияның бұл сипаты сингулярлық маңында квадрупольдық кеңістік-уақыттың қасиеті қара құрдым жағдайына өзгеше болатыны және бұл әсер репульсивті гравитацияның бар болуымен түсіндіріледі [45]. Бұл нәтижелер келесі бөлімде мардымсыз деформацияланған жалаңаш сингулярлы кеңістік-уақыт жағдайында жалғасты талқыланады [46,47].

Еркін параметрдің әсер ету шамасын экваторлық жазықтықтағы геодезиялық қозғалыстар ғана емес, экваторлық емес жазықтықтағы қозғалыстарға да елеулі өзгерістер туғызатынын сандық зерттеулер көрсетеді.

$\theta \in [0,\pi]$ және $\varphi \in [0,2\pi]$ екенін ескерсек, (1.39), (1.40), (1.41) және (1.42) теңдеулерін (1.43) сандық жолмен шеше аламыз.

Қызықты нәтижелердің бірі келесі графикада көрсетілген. Егер q-мәнін өзгертетін болсақ, онда 1.8 және 1.9-суретте көрсетілген графиктерді алуға болады.



Сурет 1.8 – Сол жақтағы суретте q=0.27, ортадағы суретте q=0.26 мәндері үшін; Қара түсті орталық дене, әр түрлі $\theta(0)$ басталу мәніне байланысты орбита жазықтығының бұрылуы. Алғашқы шарттар:

$$r(0)=20, \varphi(0)=\pi/4, r_{,\tau}(0)=0, \theta_{,\tau}(0)=0.008, \varphi_{,\tau}(0)=0.008$$

Графиктерден көрініп тұрғандай, квадрупольдық q параметрінің әсері геодезиялық қозғалыстарға тигізетін әсері айтарлықтай болады. Бұл нәтижелерді тіпті квадрупольдық параметрдің кіші жағдайында, мардымсыз деформацияланған ықшам объектілердің өрісінде қозғалған сынақ бөлшектердің қозғалысын қарастырғанда да айқын көруге болады, оны келесі бөлімдерде толықтай көрсететін боламыз. Тұйықталған және тұйықталмаған траекториялар үшін Шварцшильд жағдайындағы траекторияларға қарағанда анағұрлым өзгешеліктер болады. Бұл жерде, Эйнштейн теңдеулерінің өстік симметриялық вакуумдық дәл шешімі болып табылатын, массалық таралуды квадрупольдық параметр арқылы сипаттайтын q-метрикасының қасиеттерімен шектелеміз.

1.4 Шешімдерді генерациялау әдісі

Қара құрдымдардың бірегейлігі теоремалары [48] оқиғалар горизонты бар Эйнштейннің вакуумдық өріс теңдеулерінің ең жалпы асимптотикалық жазық шешімі - масса мен бұрыштық импульске сәйкес келетін тек екі тәуелсіз параметрі арқылы сипатталатын Керр метрикасы екенін айтады. Мультипольдік моменттер көзқарасы бойынша, бұл тұжырым бойынша, қара құрдымдардың тек массалық монопольды және бұрыштық дипольдік моменттері ғана болуы мүмкін. Сол негізде, ықшам объектілердің барлық жоғары мультипольдік моменттері гравитациялық толқындар түрінде, айналмалы массаның таралуының гравитациялық коллапсы кезінде жоғалып кетуі мүмкін, олардың соңғы күйі қара құрдым болып табылады.

Екінші жағынан, астрофизикалық ықшам объектілерге тек қара құрдымдар ғана емес, сонымен қатар қарапайым жұлдыздар, нейтрондық жұлдыздар, ақ ергежейлілер, планеталар және т.б. кіреді. Мұндай объектілердің гравитациялық өрісін сипаттау үшін жоғары реттік мультипольдік моменттердің маңызды рөл атқаруы мүмкін. Сфералық симметриядан ауытқуды сипаттайтын квадрупольдық моменті бар, статикалық массаның таралуының ерекше жағдайын қарастырайық. Бірегейлік теоремасы бойынша, статикалық жағдайда, квадрупольдық моменттің жойылған жағдайында бір ғана вакуумдық шешім болады, яғни Шварцшильд шешімі. Жоғалмайтын квадрупольді қарастырғанда бірегейлік теоремасы күшін жояды, сондықтан жалпы жағдайда, массалық және квадрупольдық параметрлері бар вакуумдық шешімдердің шексіз саны болуы мүмкін. Квадрупольдық параметрі бар алғашқы вакуумдық шешімді 1917 жылы Вейл алған [13]. Бүгінгі таңда көптеген басқа да шешімдер белгілі, сонымен қатар, олардың әртүрлі стационарлық жалпыланулары да бар [2, 49-53]. Өріс теңдеулерінің дербес жағдайлардағы қасиеттерін пайдалану арқылы және гармоникаға белгілі бір дифференциалдық операторларды қолдану арқылы көптеген басқа статикалық шешімдерді алуға болады. Барлық осы шешімдерге қатысты ортақ мәселелердің бірі - олардың күрделі математикалық құрылымына байланысты жаңа шешімдерді алу өте қиын. Біз жоғарыда Zipoy-Voorhees метрикасын Шварцшильд метрикасының квадрупольдық параметрмен (q – метрика) жалпылауы ретінде белгілі екендігін көрдік.

Сонымен қатар, барлық астрофизикалық объектілердің өз өсінен айналу қасиетін ескерсек, онда жоғарыдағы статикалық, квадрупольдық метрикада маңызды физикалық айналу параметрі жетіспейді. Негізінде, статикалық шешімдерді пайдаланып, стационар шешімдер алудың жолдары алуан түрлі, және көптеген стационар жалпыланған шешімдер алуға болады, алайда олардың бәрі физикалық тұрғыдан мағынасы бар шешімдерді бермейді. Квадрупольдық массаның таралуын және өзіндік айналылуды ескере отырып, q-метриканың стационарлық жағдайлар үшін жалпылану болып табылады және ол айналатын, сфералық симметриядан ауытқыған астрофизикалық ықшам объектілердің гравитациялық өрісі үшін біршама нақты жағдайларға жуық модель ретінде қарастыруға болады. Төменде, осы стационар жалпылауда қарапайым бірақ өте маңызды әдісті атап өтеміз. Соңында, физикалық тұрғыдан мағынасы бар статикалық шешімдерді стационар жағдайлар үшін жалпылаудың мүмкіндігіне көз жеткіземіз.

Эрнст потенциалы

Осьтік симметриялы, стационарлық гравитациялық өрістер үшін вакуумдық өріс теңдеулерінің қарапайым түрлерін әртүрлі әдістермен алуға болады. Алайда бұл теңдеулердің нөлдік емес жаңа шешімдерін табу өте қиын. Эрнст [3] өріс теңдеулердің координаталарға тәуелсіз жазылатын жаңа түрін тапты, өріс теңдеулерінің симметриясын зерттеу арқылы жаңа шешімдерді табуға мүмкіндік болатынын көрсетті. Эйнштейн өріс теңдеулерінің ең алғашқы квадрупольдық шешімін Эрез және Розен тапқан [54,55]. Табылған шешімдерде кейбір қателіктер болды, кейінірек оларды Дорошкевич, Виникор және Янг, Коултер және басқа зерттеушілер дұрыстады. Эйнштейн өріс теңдеулерінің басқа да мультипольдік шешімдерін Кеведо (1986, 1989) [11], Кеведо және Машхун [5] және Кастежон және т.б ғалымдар тапты.

Эрнст f және Ω метрикалық функцияларды Лагранж функциясын вариациялау арқылы өріс теңдеулерін алуға қолданды. Енді, жоғарыда алынған өріс теңдеулерін пайдаланып Эрнст теңдеуін алу жолдарына тоқталамыз.

Ең алдымен (1.10) өріс теңдеулерін төмендегі түрінде қайта жазуға болатынын атап өтеміз

$$\left(\varrho^{-1} f^2 \omega_\varrho\right)_\varrho + \left(\varrho^{-1} f^2 \omega_z\right)_z = 0, \tag{1.51}$$

содан кейін, Ω функциясын енгіземіз

$$\Omega_\varrho = -\varrho^{-1} f^2 \omega_z, \qquad \Omega_z = -\varrho^{-1} f^2 \omega_\varrho. \tag{1.52}$$

Осыдан (1.51) бірдей орындалатынын көреміз және (1.9) өрнек келесідегідей болып шығады

$$f\nabla^2 f - f_\varrho{}^2 - f_z{}^2 + \Omega_\varrho^2 + \Omega_z^2 = 0\,, \tag{1.53}$$

мұндағы ∇ екі өлшемді градиент операторын білдіреді. Енді (1.52) теңдеуді ∇ арқылы келесідей қайта жазуға болады:

$$f\nabla^2\Omega = 2\left(f_\varrho\Omega_\varrho + f_z\Omega_z\right). \tag{1.54}$$

Сонымен қатар, Эрнст потенциалы Е былай анықталады

$$E = f + i\Omega\,. \tag{1.55}$$

Соңында, (1.53) және (1.54) өріс теңдеулері Эрнст теңдеуінің ішінде сәйкесінше оның нақты және жорамал бөлігі ретінде қамтылғанын оңай көруге болады [3]

$$\left(ReE\right)\nabla^2 = \left(\nabla E\right)^2, \tag{1.56}$$

сонымен Эрнст теңдеуі мына түрге келеді

$$\left(ReE\right)\left(E_{\varrho\varrho} + E_{zz} + \frac{1}{\varrho}E_\varrho\right) = E_\varrho^2 + E_z^2\,, \tag{1.57}$$

ал (1.55) және (1.56) басқа өріс теңдеулерін мынадай түрде өрнектеуге болады

$$\gamma_\varrho = \frac{1}{\varrho}f^{-2}\left(f_\varrho^2 - f_z^2 + \Omega_\varrho^2 - \Omega_z^2\right), \tag{1.58}$$

$$\gamma_\varrho = \frac{1}{2}\varrho f^{-2}\left(f_\varrho f_z + \Omega_\varrho\Omega_z\right). \tag{1.59}$$

Эрнст теңдеуінің басқа түрі бар, оны Е-ге қатысты жаңа ξ потенциалын енгізу арқылы алуға болады.

$$E = \frac{1-\xi}{1+\xi}\,. \tag{1.60}$$

Сонда (1.56) өрнек мынадай түрге айналады

$$\left(\xi\xi^* - 1\right)\nabla^2\xi = 2\xi^*\left(\nabla\xi\right)^2. \tag{1.61}$$

Бұл потенциалды пайдаланудың артықтықтары бар, ол үшін сығылған сфероидты X және Y координаттарын мынадай байланыспен енгіземіз:

$$\varrho^2 = \sigma^2\left(X^2-1\right)\left(1-Y^2\right),\ \ z=\sigma XY\,. \tag{1.62}$$

(1.61) өрнек сәйкес келетін мына өрнекті жазуға болады

$$\begin{aligned}\left(\xi\xi^*-1\right)\left\{\left[\left(X^2-1\right)\xi_X\right]_X+\left[\left(1-Y^2\right)\xi_Y\right]_Y\right\}\\ =2\xi^*\left[\left(X^2-1\right)\xi_X^2+\left(1-Y^2\right)\xi_Y^2\right].\end{aligned} \tag{1.63}$$

Бұл теңдеу $X\leftrightarrow Y$ координаталары өзгергенде де инвариантты болады, яғни $\xi\left(X,Y\right)$ (1.63) теңдеудің шешімі болса, онда $\xi\left(Y,X\right)$ да теңдеудің шешім болады. Шварцшильд метрикасына сәйкес келетін (1.63) теңдеудің қарапайым шешімі $\xi^{-1}=X$ потенциалы, оған сәйкес жаңа $\xi^{-1}=Y$ деген шешімді аламыз. Егер (1.63) қанағаттандыратын $\xi^{-1}=X$ және $\xi^{-1}=Y$ шешімдерінің сызықтық комбинациясын алғымыз келсе, онда λ нақты параметрді ескеріп, төмендегідей теңдеуді алуға боалды:

$$\xi^{-1}=X\cos\lambda+iY\sin\lambda\,, \tag{1.64}$$

бұл қарапайым шешім Керр шешіміне сәйкес келеді [1].

Айналмалы q−метрика және оның қасиеттері

Сфералық координаталардағы q – метрикасы (1,33) түрінде өрнектесін, оны мына түрде қайта жазуға болады [31]:

$$ds^2=h^{1+q}dt^2-h^{-q}\left[\left(1+\frac{m^2\sin^2\theta}{r^2-2mr}\right)^{-q(2+q)}\left(\frac{dr^2}{h}+r^2d\theta^2\right)+r^2\sin^2\theta d\varphi^2\right], \tag{1.65}$$

Мұндағы белгілеу мынаған сәйкес келеді $h=1-\dfrac{2m}{r}$.

Бұл метрика Эйнштейн теңдеулерінің өстік симметриялы статикалық, асимптотикалық жазық вакуумдық шешімі.

Метриканың барлық қасиеттері деформацияланған массалық таралудың сыртқы гравитациялық өрісін сипаттау үшін пайдалануға болатынын көрсетеді. q-метриканың стационарлы жалпылауын көрсету үшін, жоғарыдағы генерациялау әдісіне ыңғайлы болу үшін созылыңқы сфероидты координаталарын енгіземіз,

$$x=\frac{r}{m}-1,\qquad y=\cos\theta. \tag{1.66}$$

Сфероидты координаталарда жалпы стационарлық осьтік симметриялы сызықтық элементті мына түрде жазуға болады[56]

$$ds^2=f\left(dt-\omega d\varphi\right)^2-\frac{\sigma^2}{f}\left[e^{2\gamma}\left(x^2-y^2\right)\left(\frac{dx^2}{x^2-1}+\frac{dy^2}{1-y^2}\right)\right.$$
$$\left.+\left(x^2-1\right)\left(1-y^2\right)d\varphi^2\right], \tag{1.67}$$

мұндағы σ =*const.* және барлық метрикалық функциялар тек х және у-ге тәуелді. (1,55) өрнектегідей комплекс Эрнст потенциалын енгізу тиімді болады[3]

$$E=f+i\Omega, \tag{1.68}$$

мұндағы Ω функциясы төмендегі теңдеулер арқылы анықталады

$$\sigma\left(x^2-1\right)\Omega_x=f^2\omega_y,\qquad \sigma\left(1-y^2\right)\Omega_y=f^2\omega_x, \tag{1.69}$$

Егер E потенциалы берілген болса, f метрикалық функциясын алгебралық жолмен табуға болатынын, ал метрикалық функцияны (1.69) теңдеудегі квадратуралар арқылы есептеуге болатынын көреміз.

Сонымен қатар, метрикалық функция екі бірінші ретті дифференциалдық теңдеумен анықталады, егер E белгілі болса квадратуралар арқылы интегралдауға болады. Осыдан метрика туралы барлық ақпарат (1.69) Эрнст потенциалында E қамтылғаны шығады.

Жаңа Эрнст потенциалының айқын түрін алу үшін біз статикалық шешімнен стационарлы шешімдерді генерациялауға мүмкіндік беретін шешім генерациялау әдістерін [56] қолданамыз.

Бастапқы шешім ретінде созылыңқы сфероидты координаталардағы q−метриканы алсақ, Эрнст потенциалының айқын түрін алу үшін бірнеше дифференциалдық теңдеулерді шешу керек. Эрнст потенциалының соңғы өрнегін былай жазуға болады [56-59]

$$E=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^q\frac{x-1+\left(x^2-1\right)^{-q}d_+}{x+1+\left(x^2-1\right)^{-q}d_-}. \tag{1.70}$$

Бұндағы белгілеулер:

$$d_\pm=\alpha^2\left(1\pm x\right)h_+h_-+i\alpha\left[y\left(h_++h_-\right)\pm\left(h_++h_-\right)\right], \tag{1.71}$$

және

$$h_{\pm} = \left(x \pm y\right)^{2q}, \tag{1.72}$$

мұнда бізде жаңа α еркін параметрі бар. Күтілгендей, α = 0 шекті жағдайда статикалық q – метрика шығады.

Эрнст потенциалының сипатын талдау арқылы біз бұл жаңа шешімнің асимптоталық жазық екенін көруге болады. Сәйкес метрикалық функцияларды есептеу осы нәтижені растайды. Оның үстіне, $y = \pm 1$ өсіндегі сипаттамасы оның аймақтан тыс сингулярлықтан айырылғанын көрсетеді, ол әрқашан $x_s = m/\sigma$ радиусының ішінде орналасқан, ол жойылған жағдайда $r_s = 2m$ нүктесінде орналасқан сыртқы сингулярлыққа сәйкес келеді. Кречман скалярының өрнегі өте қиын және оны жинақы түрде жазу мүмкін емес. Дегенмен, мұқият сандық және аналитикалық тексеру ең сыртқы сингулярлық $x_s = m/\sigma$ -де орналасқанын көрсетеді. Бұл радиустың ішінде q және σ мәніне тәуелді бірнеше сингуляр құрылымдар пайда болуы мүмкін.

Жаңа метрикаға енетін параметрлердің физикалық мағынасын білу үшін Герох [27, 28] анықтағандай координатаға тәуелсіз инвариантты мультипольдік моменттерді есептеуге болады, [9]-да ұсынылған процедураны пайдалана отырып, Эрнст потенциалынан тікелей есептеулерді жасауға болады. Есептеулердің дұрыстығына көз жеткізу үшін, q = 0 болатын нақты шектік жағдайлардан бастаған жөн. Содан кейін, $\alpha = \left(\sigma - m\right)/a$ жаңа параметрді таңдау арқылы, мультипольдарды алуға болады [56]

$$M_{2k+1} = J_{2k} = 0, \qquad k = 0,1,2,\ldots \quad , \tag{1.74}$$

$$M_0 = m, \qquad M_2 = -ma^2,\ldots \quad , \tag{1.75}$$

$$J_1 = ma, \qquad J_3 = ma^3,\ldots \quad . \tag{1.76}$$

Бұлар Керр шешімінің M_n массалық және J_n бұрыштық мультипольдік моменттері. Сәйкес Эрнст потенциалынан созылыңқы сфероидты координаталарда Керр метрикасын алуға болады. Шын мәнінде (1.71) теңдеуде берілгендей, жаңа шешімде гравитациялық көздің айналуы туралы ақпарат бар екенін көрсетеді.

Жалпы жағдайында, еркін q параметрінің нөлден өзгеше кезінде келесі мультипольдік моменттерді аламыз

$$M_0 = m + \sigma q, \tag{1.77}$$

$$M_2 = \frac{7}{3}\sigma^3 q - \frac{1}{3}\sigma^3 q^3 + m\sigma^2 - m\sigma^2 q^2 - 3m^2\sigma q - m^3, \tag{1.78}$$

$$J_1 = ma + 2a\sigma q\,, \tag{1.79}$$

$$J_3 = -\frac{1}{3}a\left(-8\sigma^3 q + 2\sigma^3 q^3 - 3m\sigma^2 + 9m\sigma^2 q^2 + 12m^2\sigma q + 3m^3\right). \tag{1.80}$$

Мұнда жұп гравитомагниттік және тақ гравитоэлектрлік мультипольдардың бірдей жоғалатынын көрсетуге болады, өйткені шешімдер экваторлық жазықтықта, яғни *y = 0* жазықтығына қатысты симметриялы. Жоғары тақ гравитомагниттік және жұп гравитоэлектрлік мультипольдарды сызықты тәуелді екенін көрсетуге болады, өйткені олар *m, a, σ* және *q* параметрлері арқылы толығымен анықталады [56].

Жоғарыдағы генерациялау арқылы алынған стационар метриканың дербес жағдайларда белгілі шешімдерді беретініне көз жеткіздік, яғни, айналу параметрі жойылған кезде статикалық q-метриканы береді, ал q-параметрі жойылған кезде айналу параметрі бар болса онда Кеер метрикасын аламыз, айналу және q-параметрі бірге жойылған кезде, статикалық қара құрдымның шешімі – Шварцшильд метрикасын аламыз[58-59].

Өстік симметриялы, статикалық және стационар кеңістік-уақыттағы релятивистік мультипольдік моменттердің анықтамасы әдебиеттерде әртүрлі болып келеді, алайда олардың арасындағы байланыс бары белгілі. Диссертациялық жұмыстың соңында қосымша А да, мультипольдік моменттерді есептеудің тәртібі көрсетілген.

2 ЖАЛАҢАШ СИНГУЛЯРЛЫҚТАР, ОЛАРДЫҢ ГРАВИТАЦИЯЛЫҚ ӨРІСІ

ЖСТ дағы өріс теңдеулерінің дәл шешімдері физикалық тұрғыдан ғана емес, математикалық құрылымы жағынан да қызықты және күрделі тақырып болып саналады. Ең алғашқы дәл шешімді 1916 жылы Шварцшильд тапқаны белгілі, бұл шешім статикалық айналмайтын массасы *m* ге тең қара құрдымның гравитациялық өрісін сипаттаса, айналатын кеңістік-уақыт метрикасын арада 50 жылдай уақыт өткенде табылды, Керр шешімі айналатын массасы *м* және айналу параметрі *a* болатын қара құрдымның кеңістік-уақытын сипаттайды. Алайда математикалық тұрғыдан көптеген дәл шешімдер бар, соның ішінде жүзден аса сфералық симметриялық шешімдер бар, олардың қазірге белгілі бірнешеуі ғана физикалық тұрғыдан мағынасы бар. Өстік симметриялы дәл шешімдердің саны да көп, алайда көп сандысының әлі күнге физикалық мағынасы түсініксіз. Қара құрдымдардан басқа, нейтронды жұлдыздар, ақ ергежейлілер т.б., ықшам объектілерді сипаттайтын, олардың ішкі құрылымын ескеретін және сыртқы гравитациялық өрісін де түсіндіретін дәл шешімдерді табу осы уақытқа дейін шешімін таппаған мәселе. Ондағы себеп - өріс теңдеулерінің аса күрделі математикалық құрылымы болғандықтан, дәлірек айтсақ, сәйкесті бастапқы және шекаралық шарттарға құрылған дербес туындылы, сызықты емес теңдеулер жүйесін шешудің күрделілігі.

Қара құрдымдардан басқа да ықшам объектілердің ішіндегі гравитациялық өрісті сипаттайтын көптеген жуықталған метрикалар бар, алайда олардың қандай да бір шектеулі қолданыс аймақтары болатыны белгілі. Біздің қарастырып отырған мәселемізде, өріс теңдеулерінің өстік симметриялы шешімі квадрупольдық моментті ескеріп, деформацияланған массалық таралудың сыртқы гравитациялық өрісін сипаттауға болатыны жоғарыда айтылды. Бұл шешім ең ықшамды өстік симметриялы Эйнштейн теңдеулерінің вакуумдық шешімі болып табылатын q-метрикасы жалаңаш сингулярлы кеңістік-уақыттық қасиетке ие екендігін баса айттық. Бұл тарауда жалаңаш сингулярлықтың пайда болуы және оның басты ерекшеліктері туралы айтылады, сонымен қатар, астрофизикалы тұрғыдан объектілерің деформациясын ескеретін, жаңа өстік симметриялы, жуықталған квадрупольдық шешімді таныстырамыз, оның кеңістік-уақыт қасиеттері зерттеледі. Осы метрикамен сипатталатын, мардымсыз деформацияланған ықшам объектілердің сыртындағы гравитациялық өрістегі сынақ бөлшектердің қозғалысы зерттеледі.

2.1 Ғарыштық цензура және Жалаңаш сингулярлық

Кеңістік-уақыттың сингулярлығы - бұл қалыпты жағдайдағы физикалық заңдар қолданысын тоқтататын немесе жалпы салыстырмалылықтағы физикалық заңдар мүлдем орындалмайтын кеңістік-уақыт құрылымдағы нүкте немесе аймақ [57]. Осы нүктеде немесе аймақта кеңістік-уақыт өте қатты

сығылған немесе шексіз жоғары тығыздыққа ие болуы мүмкін, бұндай жағдайда, әдеттегі физикалық модельдерді пайдалану мүмкін емес. Кеңістік-уақыттың сингулярлығы негізінен екі жағдайда пайда болады: гравитациялық коллапс кезінде және ғаламның қалыптасуына байланысты космологияда. Космологиялық сингулярлық Ғаламның басталған кезеңінде бір рет болды деп есептеледі, ал массивті жұлдыз өзінің тартылыс күшінің әсерінен колапсталғанда сингулярлықтар пайда болады деп қарастыруға болады.

Массивті жұлдыздардың коллапсы туралы, сингулярлықтың екі негізгі түрі бар: ол гравитациялық оқиғалар көкжиекпен жабылған немесе қоршалған және ол Ғаламдағы алыстағы бақылаушыларға көрінбейді, немесе ол оқиғалар көкжиегімен жабылмаған және ол алыстағы бақылаушыларға көрінеді.

Роджер Пенроуз ұсынған ғарыштық цензура гипотезасы (ҒЦГ) гравитациялық коллапс кезінде пайда болатын жалаңаш сингулярлықтарды жоққа шығару болып табылады. ҒЦГ көкжиекпен жабылмаған сингулярлықты ешқашан пайда болмайды деп немесе кем дегенде қандай да бір физикалық механизм арқылы оның пайда болуына табиғат жол бермейді деп қарайды.

Оппенгеймер-Снайдер-Датттың (ОСД) моделі біртекті таралған тозаңды материяның коллапсы қарастырады. ОСД коллапс моделі сингулярлық оқиғалар көкжиегінің ішінде жасырылғанын көрсетеді. Бірақ бұл барлық коллапстанған жұлдыздарға қатысты айтылмаған. ҒЦГ бойынша, массивты жұлдыз жаппай колапсталған кезде, оның сингулярлығы әрқашан оқиғалар көкжиегінің ішінде жасырылады деген болжам жасайды. Бұл гипотеза қара құрдым физикасында және оның астрофизикалық қолданбаларында іргелі болжамға айналды[60].

Көптеген зерттеушілер ҒЦГ ұсынысына қосымша, гравитация теориясы аясында цензураны қолдайтын және жалаңаш сингулярлықты жоққа шығаратын нақты теореманы жасауға және оны дәлелдеуге тырысты. Алайда олар қанша күш жұмсаса да ҒЦГ-нің орындалатыны туралы ықтимал дәлелдерді көрсете алмады. Бұл сингулярлықтардың жанында кеңістік-уақыттың күрделі қасиеттерін көрсете алатын және гравитациялық коллапстың барлық ықтимал сценарийлерін есепке алатын математикалық әдістер мен теорияларды әзірлеуді талап етеді.

1970 жылы және одан кейінгі жылдары ғалымдар қара құрдым теориясында, сонымен қатар сол теориялардың ғарыш әлемінде қалай жұмыс істейтінін түсінуде де үлкен жетістіктерге жетті[60,61]. Соған қарамастан, ҒЦГ-ын қажеттілігі де арта түсті. Үйткені, егер бұл гипотеза дұрыс болмаса, қара құрдым туралы білетін маңызды ақпараттардың көпшілігі шындыққа сәйкес келмеуі мүмкін. Осылайша, ғалымдар қара құрдым физикасын зерттеуді жалғастыра отырып, ҒЦГ -ны дәлелдеу үшін көп жұмыстар атқарды. Бұл мәселе, өз кезегінде қара құрдымды және гравитацияны зерттеудегі ең маңызды мәселелердің біріне айналды. Бірақ, осы елеулі әрекеттерге қарамастан, ешкім ҒЦГ -ны әлі дәлелдей

алмады және бұл үшін әлі де нақты математикалық тұжырымдама жоқ. Бұл үлкен мәселе, өйткені қара құрдым физикасын түсінуде үлкен жетістіктерге жеткенімізге қарамастан, оның негізінде жатқан ҒЦГ туралы ешқандай түсінікке ие емеспіз.

ҒЦГ-ның дәлелін табу теориялық физикадағы белсенді зерттеу саласы болып қала береді, бұл бағыттағы прогресс қара құрдымдар туралы түсінігімізді тереңдетіп қана қоймай, сонымен қатар, гравитация мен кеңістік-уақытының іргелі табиғатын түсінуге мүмкіндік береді.

Жоғарыда атап өткеніміздей, заттың энергия тығыздықтары, кеңістік-уақыттың қисықтығы және барлық сәйкес физикалық шамалар кеңістік-уақыт сингулярлығына жақындаған сайын шексіздікке ұмтылады. Сингулярлықтың өзі кеңістік уақытының бөлігі емес екенін атап өту керек. Негізінде, кеңістік-уақыт ішінде физикалық регулярлық шарттар орындалуы керек, атап айтқанда: кейбір қарапайым үйлесімді физикалық ережелер мен заңдылықтар, кеңістік-уақыт континуумындағы барлық оқиғаларда гравитациялық потенциалдардың үйлесімді қасиеттері мен оның локальды аумағында арнайы салыстырмалық теориясының орындалуы сияқты қарапайым шарттар орындалуы керек. Бірақ сингулярлықты кеңістік-уақыттың бір бөлігі ретінде қарастырсақ, бұл қарапайым ережелер орындалмайды. Сондықтан сингулярлықты кеңістік-уақыттың бір бөлігі деп ойлаудың орнына, оны ғаламның, кеңістік-уақыттың қандай да бір шекарасы ретінде қарастыра аламыз. Шын мәнінде, Үлкен жарылыс жағдайында ол ғаламның бастапқы нүктесі болып саналады.

Кезкелген теориядағы сингулярлықтар сол теорияның шектеулерін көрсетеді және оның қай жерде бұзылатынын көрсетеді. Егер біз ЖСТ дағы төрт өлшемді кеңістік-уақыттың сингулярлығына келер болсақ, бұл жалпы салыстырмалылық теориясы бұзылатын аймақ деп жауап берер едік. ЖСТ жағдайында сингулярлықтардың болуы ғаламдағы масса-энергия тығыздығы мен кеңістік-уақыт қисықтығы өте жоғары аймақтарды айтады, бұл Эйнштейн теориясының орындалу шегін білдіреді [61,62]. ЖСТ болжағандай, сингулярлықтардың әртүрлі гравитациялық процестерде пайда болуы мүмкін екенін білгенімізбен, олардың табиғаты, құрылымы және қасиеттері туралы қазірге дейін бізге белгілі физикалық мәліметтер өте аз. Бұдан шығатыны, кеңістік-уақыттың сингулярлықтары болғанымен, сингулярлық пен уақиға көкжиектерінің арасындағы тікелей байланысты дәлелдейтін физикалық теория жоқ. Басқаша айтқанда, сингулярлық оны қоршаған оқиға көкжиегісіз өмір сүруі әбден мүмкін. Бұл идея барлық сингулярлықтар оқиға көкжиегінің артында жасырынып, сыртқы бақылаушыларға мәңгі көрінбейтін болуы керек деген дәстүрлі идеяға қарсы тұрады. Алайда оқиға көкжиегі жоқ сингулярлықтардың бар екендігін дәлелдеу немесе жоққа шығару теориялық және бақылаулар мәселесі болып қала береді.

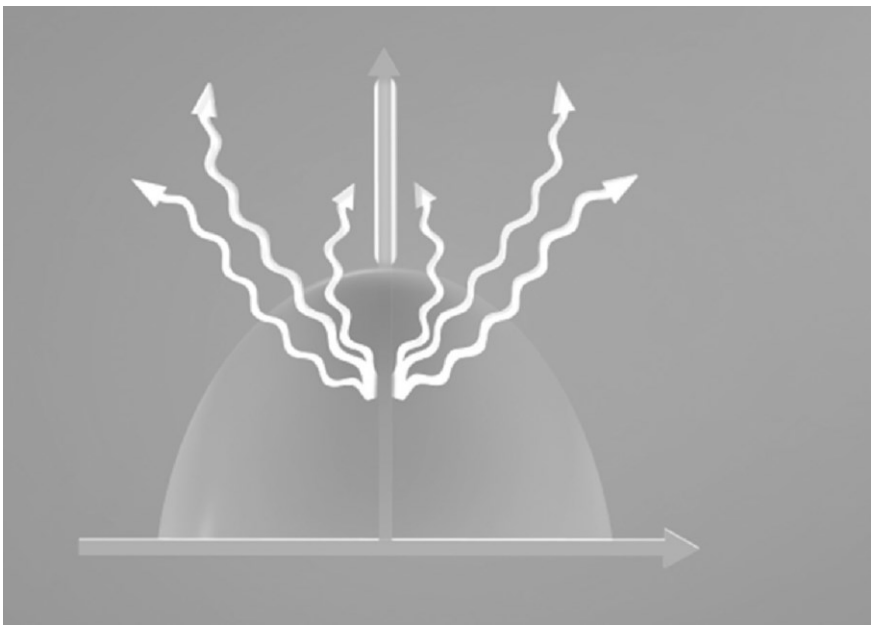
Жалаңаш сингулярлық - қара құрдым ішіндегі сингулярлыққа қарағанда, оқиға көкжиегімен жасырынбайтын кеңістіктегі гипотетикалық сингулярлық (2.1-сурет). ЖСТ контекстінде, егер мұндай жалаңаш сингулярлықтар болса, олар қара құрдымнан тыс бақылаушыларға көрінетін және оларға ақпаратты жеткізе алатын еді. Басқаша айтқанда, егер жалаңаш сингулярлықтар болса, олар алыс жерлерге баратын жарық пен бөлшектерді жібере алады, бұл бізге олардың жанында не болып жатқанын байқауға мүмкіндік береді. Яғни, кеңістік-уақыт бойынша, болашақта шексіздікке дейін баратын және өткен шақ бойынша сингулярлық аймақта аяқталатын кеңестік тәрізді емес траекториялардың жиынтығы бар дегенді білдіреді.

Қара құрдым ішіндегі сингулярлық үшін жоғарыдағы айтылған құбылыстардың болуы мүмкін емес, атап айтқанда, қара құрдымға енген ақпарат сингулярлық аумақтан ешқашан шықпайды. Осылайша, гравитациялық коллапстың соңғы нәтижесі қара құрдым немесе жалаңаш сингулярлық екенін тексеру үшін ғалымдар бөлшектер немесе жарықтың сингулярлықтан немесе оған өте жақын аумақтан басталып, содан кейін сыртқа қарай қозғалатын траекториялар бар-жоғын білуі керек. Егер мұндай траекториялар бар болса, бұл жалаңаш сингулярлықтың болу мүмкіндігін болжайды, егер бәрі сингулярлық ішінде қалса, онда бұл қара құрдым болуы мүмкін. Қара құрдымдар да, жалаңаш сингулярлықтар да қарапайым физикалық жағдайлардағы гравитациялық коллапстың соңғы ықтимал нәтижелері болып табылады. Дегенмен, қара құрдымға қарағанда, жалаңаш сингулярлықтың конфигурациясы мүлдем басқа теориялық және бақылау қасиеттеріне ие[63-67] (2.2-сурет).

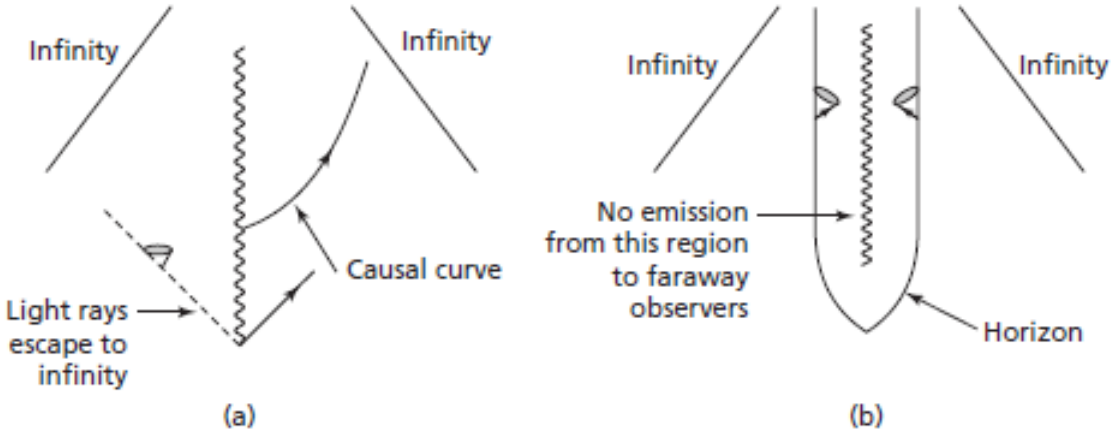
Қорытындылай келе, жалаңаш сингулярлықтың пайда болуы үш негізгі маңызды қасиетпен сипатталады:

1. Біріншіден, сингулярлық аймақтан шығатын шексіз жарық пен бөлшектердің траекториялары бар, олардың бастапқы нүктесі сингулярлықтың өзінде болады.
2. Екіншіден, осы траекториялар бойындағы сингулярлыққа жақындаған сайын, энергия тығыздығы мен кеңістік-уақыт қисықтары шексіз өсе береді.
3. үшіншіден, барлық кеңістік-уақыт заңдылықтары қалыпты физикалық шарттарды қанағаттандырады, бұл күшті гравитациялық режимдеріндегі физикалық процестерді зерттеу үшін маңызды.

ЖСТ заңдарына сәйкес, коллапс кезінде энергия тығыздығы және кеңістік-уақыт қисықтығы сияқты физикалық шамалар шексіз үлкен болған кезде кеңістік-уақыт сингулярлығы қалыптасады. Дәл осы жерде физиканың қалыпты ережелері бұзылып, өте күшті гравитациялық өріс пайда болады.



Сурет 2.1 – Жалаңаш сингулярлық. Қара құрдымнан айырмашылығы, жарық сәулелері сингулярлықтан шығады және алыс болашақтағы бақылаушыларға бағытталған (Scientific American, ақпан 2009; Кенн Браун, Mondolithic Studio)



Сурет 2.2 – (a) жалаңаш сингулярлықтың және (b) қара құрдымның схемалық көрінісі. Жалаңаш сингулярлықпен аяқталатын гравитациялық коллапс қара құрдыммен аяқталатын коллапсқа салыстырғанда айтарлықтай ерекшеленетін құрылымға ие[67]

Осындай экстремальды жағдайларда кванттық әсерлер сингулярлыққа жақын шағын масштабтарда маңызды болады. Сайып келгенде, бұл сингулярлықты шешу үшін гравитацияның кванттық теориясы қажет.

Толық, жан-жақты кеңістік-уақыт сценарийіндегі жұлдыздардың даму барысы және үздіксіз коллапс нәтижелері ЖСТ дағы сингулярлық теоремалар арқылы сипатталады. Бұл теоремалар сингулярлықтардың пайда болуы мүмкін

деп болжайды, алайда осы сингулярлықтардың табиғаты, құрылымы немесе физикалық қасиеттері туралы толық мәлімет бермейді. Атап айтқанда, сингулярлық теоремалар келесі болжамдарға сүйенеді:

1. Зат өрістерінің оң энергия тығыздығы болуы керек;

2. Кеңістік-уақыттың үйлесімді байланысы болу керек

3. Массаның жеткілікті мөлшері шағын аумаққа сығылуын қамтамасыз ететін уақыт- кеңістіктік беттер пайда болуы керек.

Теоремалар, егер осы үш шарт орындалса, кеңістік-уақыт сингулярлығы болуы керек дегенді білдіреді.

Бұдан шығатыны, жалпы релятивистік гравитациялық коллапс кезінде жоғарыдағы шарттар орындалса, онда кеңістіктік-уақыттық сингулярлық қалыптасатынын көрсетеді. Бұл сингулярлықтар тығыздық, кеңістіктік-уақыт қисықтығы және басқа да физикалық шамалардың сингулярлыққа жақындаған сайын шексіз үлкен болуымен сипатталады. Демек, массивті жұлдыздың өмірлік циклінің соңында кез-келген реалистік коллапсы міндетті түрде осындай сингулярлыққа әкеледі. Жоғарыда сипатталған сценарий Оппенгеймер-Снайдер-Датт (ОСД) коллапсы деп аталады, онда коллапстанған материя бұлты бірден сингулярлық күйге түседі, бұл жалпы гравитациялық коллапс процесінің дербес жағдайын білдіреді[67-70].

ЖСТ дағы сингулярлық теоремалар белгілі бір физикалық негізделген жағдайларда кеңістік-уақыт сингулярлықтарының болуын болжайды. Дегенмен, олар бұл сингулярлықтың табиғаты, құрылымы немесе қасиеттері туралы толық мәлімет бермейді. Айта кету керек, олар бізге бұл сингулярлық оқиға көкжиегінің артында жасырынатынын немесе сыртқы бақылаушыларға көрінетінін айтпайды. Теоремалар жұлдыздың коллапсы кезінде сингулярлық оқиға көкжиегіне дейін немесе одан кейін пайда болатынын анықтамайды.

Осылайша, кеңістік-уақыт сингулярлығы гравитациялық коллапс нәтижесінде қалыптасып, оқиға көкжиегімен қоршалуы мүмкін, бұл оның Ғаламдағы алыстағы бақылаушылармен байланыста болуына мүмкіндік береді. Бұл жағдайда, алыстағы бақылаушыларға сигнал жібере алады. Бұл тұрғыдан гравитация фундаменталды физика үшін терең салдары бар, жаппай коллапстанып жатқан жұлдыздың соңғы нәтижесі туралы қызықты нәтижелерді болжайды.

Сингулярлықтың көрінетінін анықтайтын маңызды фактор - бұл сингулярлықтың құрылымы мен кеңістік-уақыт қисығының кеңістікте тұйықталған беттерді қалыптастыру үшін өзара әрекеттесуі. Бұл өзара әрекеттестік сингулярлық оқиға көкжиегінің артында жасырын қалуын немесе сыртқы бақылаушыларға көрінетінін шешеді.[70]

Егер сингулярлық әрқашан оқиғалар көкжиегімен қамтылса және егер ҒЦГ ақиқат болса, онда бұл қара құрдым теориясы мен астрофизикалық

қолданбалары үшін өте қажетті негіз болады. Екінші жағынан, егер массивті жұлдыздың үздіксіз коллапсы нәтижесінде пайда болатын кеңістік-уақыт сингулярлықтары сыртқы бақылаушыларға көрінетін болса, онда біз гравитациялық коллапс нәтижесінде пайда болатын ғаламның өте ультра тығыз аймақтарын бақылау және зерттеу мүмкіндігіне ие болар едік.

2.2 Гравитациялық коллапс және жалаңаш сингулярлықтың қалыптасуы

Гравитациялық коллапстың әртүрлі нәтижелері туралы және де ҒЦГ мәселесі бойынша шешім қабылдау үшін жеткілікті ақпарат жоқ. Ұзақ жылдар бойғы талпыныстарға қарамастан, цензура гипотезасын дұрыс, математикалық тұрғыдан қатаң тұжырымдау және оны дәлелдеу тым қиын болып шықты. Гипотезаның маңыздылығын ескере отырып жасалған көптеген зерттеулер нәтижесі, біртекті емес тығыздық пен қысымды қоса алғандағы шынайы коллапс конфигурациясын сипаттай алатын гравитациялық коллапстың әртүрлі сценарийлерін егжей-тегжейлі, мұқият зерттеу маңызды міндет болды. Зерттеушілер материяның әртүрлі формаларын қамтитын бірнеше гравитациялық коллапс сценарийлерін қарастырды, соның ішінде ағынды радиациялық қабықтардың коллапсы, қысымсыз материяның сфералық коллапсы, яғни біртекті емес тозаң және қысымы нөлден өзгеше идеалды сұйықтықтарды, кейбір сфералық емес коллапс жағдайлар да зерттелді. Соның нәтижесінде, жалаңаш сингулярлықтардың шын мәнінде коллапстың соңғы өнімі ретінде пайда болатыны туралы жалпы болжам пайда болды. Әрі қарай, барлық осы жағдайларда жалаңаш сингулярлықтан оқшауланған траекториялар ғана емес, сонымен қатар, траекториялар жиынтығының нөлдік емес өлшемін беретін кеңестік тәрізді емес геодезиялардың жиынтығы алынды. Жалаңаш сингулярлықтан оқшауланған нөлдік траектория ғана шықса - бір фронттың сәулеленуін білдіреді. Екінші жағынан, нөлдік емес өлшеммен кеңістік тәрізді емес қисықтардың жиынтықтары пайда болуы - бұл құбылысты маңыздырақ етеді. Сондай-ақ, пайда болған жалаңаш сингулярлықтың гравитациясы күшті болғаны анықталды, өйткені тығыздық пен қисықтық сингулярлыққа жақындау шегінде өте қатты өзгереді. Осылайша, бұл кеңістік-уақыт коллапысының физикалық тұрғыдан шынайы және жойылмайтын сипаттамасы болып шықты.

Гравитациялық коллапс сценарийлеріндегі жалаңаш сингулярлықтардың қалыптасуы мен қасиеттерін түсіну – ЖСТ-ның іргелі физикасы үшін, ғалам туралы нақты біліміміздің жетілдіру үшін өте маңызды. Жалаңаш сингулярлықтардың жанында кеңістік уақытының сипатын одан әрі зерттеу экстремальды гравитациялық құбылыстардың табиғаты және Әлемді басқаратын іргелі заңдар туралы құнды ақпарат бере алады.

Логикалық тұрғыдан, егер жұлдыздың орталығындағы біртекті емес жоғары тығыздықты ескерсек, онда коллапстың соңғы нәтижесі қара құрдымды бере ма

деген сұрақ туындайды. Осы тұрғыдан, материяның біртекті емес тығыздықпен таралуының коллапсқа әсерін және алынған нәтижелерді, бұрынғы біртекті коллапсты зерттеулерден алынған қорытындылармен салыстыра қайта бағалауға болады.

Материяның біртекті емес таралу мәселесін - сфералық симметриялы, біртекті емес тозаң бұлтының гравитациялық коллапысын сипаттайтын Леметр – Толман – Бонди моделі (ЛТБ) арқылы зерттеуге болады. Эйнштейн өріс теңдеулерінде коллапстанған жұлдыздың ішкі бөлігіндегі материяның таралуы біртекті емес, ал сыртқы бөлігі вакуум деп қарастырады. Біртекті тозаңды тығыздықпен сипатталатын ОСД моделі осы ЛТБ модельдерінің дербес жағдайы болып табылады[67].

Физикалық тұрғыдан, қарастырылып отырған коллапсты жақсырақ түсіну үшін, зерттеушілер өзгеретін бірғана физикалық шаманы таңдаудан бастады, нақтырақ айтсақ, коллапстанатын тозаң бұлтының бастапқы тығыздығы. Бұл тығыздық барлық кезде біртекті емес деп қарастырылады. Тығыздықтың таралуының бірдей болмауы, физикалық тұрғыдан нақтырақ сценарийлерді сипаттау үшін маңызды. Келесі қадамда, коллапс нәтижесіне қысым мен пішін сияқты шамалардың қалай әсер ететінін көру үшін, қажетті факторлар қарастырылады.

Тығыздықтағы өзгерістерді ескере отырып, гравитациялық коллапстың қалай болатыны туралы қажетті түсініктер аламыз. Коллапс жағдайында бастапқыда тығыздық белгілі бір бетке шоғырланған деп қарастырылады және оны қандай да бір шекарадан тыс аумақта, жымдастыру шарты ретінде сыртқы Шварцшильд өрісімен байланыстырады, ол коллапстанған материяның толық массасымен сипатталады. Бұл ұйғарымдар арқылы, сингулярлықтардың табиғатын, атап айтқанда, олардың «жалаңаш» немесе жоқ екенін зерттеуге болады. Бұл мәселе, массаның таралуы және материяның қозғалысы сияқты коллапсты сипаттайтын негізгі шамалардан құрылған теңдеулердің нақты оң шешімдерінің бар-жоғын тексеруге келіп тіреледі.

Жұлдыздың ішіндегі тығыздықтың барлық жерде өзгеріп отыруы - оларды қамтитын беттердің және оқиға горизонттарының қалыптасуын баяулатады. Бұл кешігу коллапстың қара құрдымға емес, жалаңаш сингулярлықтармен аяқталуына әкелуі мүмкін. Бұл болжаудың физикалық тұрғыдан мағынасы бар, өйткені шынайы жұлдыздар ОСД моделі қарастырғандай, біртекті тығыздыққа ие емес, орталық тығыздықтары үлкен шамадан бірте-бірте жұлдыз бетіне қарай сирейді. Осылайша әдеттегі тозаң коллапысының соңғы нәтижелері ретінде сияқты екі түрлі жағдай шығады. Бұлар сингулярлықтан бұрын оқиғалар көкжиегі бар қара құрдым немесе көкжиегі кешігіп қалыптасып жатқан жалаңаш сингулярлық. Соңғы жағдай жарық сәулелерінің орталық сингулярлықтан шығып, алыстағы бақылаушыларға жетуіне мүмкіндік береді[71].

Мұндағы негізгі фактор – коллапс кезінде көкжиектің пайда болу уақыты. Егер көкжиек сингулярлықтан ертерек пайда болса, нәтиже қара құрдым болады. Уақыттың бастапқы сәтіндегі тығыздықтың таралуының жеткілікті бір текті болмауы көкжиектің қалыптасуын кешіктіреді. Егер тығыздық жұлдыздың ортасынан жеткілікті тез төмендесе, соңғы нәтиже жалаңаш сингулярлық болып табылады, бірақ тығыздық баяу төмендесе немесе біртекті болса, қара құрдым пайда болады.

Лемейтр – Толман – Бонди (ЛТБ) моделі

Тозаңды модельдер ЖСТ-да материяның гравитациялық өрістегі қозғалысын түсінудің қарапайым тәлілі болып табылады. 1930 жылдардың аяғында, Оппенгеймер, Снайдер және Датт есімді ғалымдар гравитациялық тартылыс әсерінен біртекті тозаң бұлтының қалай коллапстанатынын зерттеді.

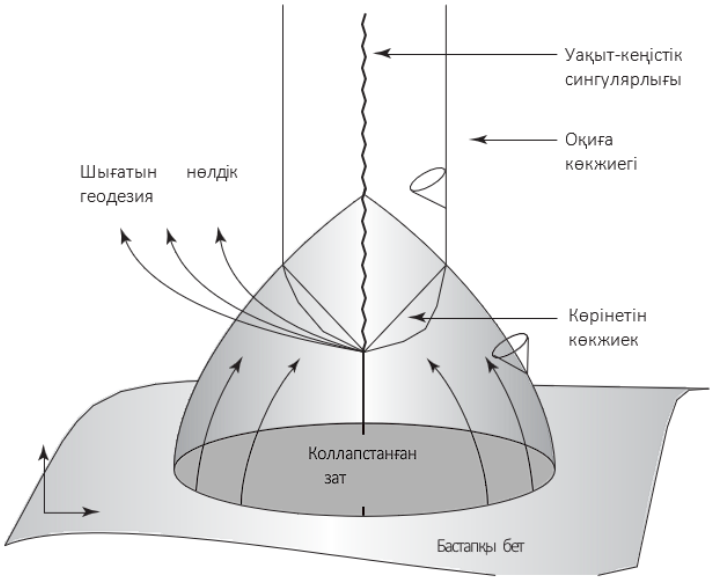
Дегенмен, бұған дейін де, 1930 жылдардың басында Джордж Леметр мен Ричард Толман секілді ғалымдар Эйнштейн теңдеулерінің тозаңды материямен, оның ішінде біртекті емес тығыздықпен сипатталатын шешімін табуға тырысқан болатын. Қазіргі уақытта белгілі болғандай, космологиялық тұрғыдан бақыланатын Әлем бірнеше жүз мега парсек масштабына дейін біртекті емес. Осылайша, Әлем үшін Эйнштейн теңдеулерінің біртекті емес шешімін қарастыру физикалық тұрғыдан өте өзекті. Ғалам біртекті болып көріне бастайтын масштаб туралы мәселеде әлі нақты тұжырым жоқ, оның бір себебі - супер кластерлердің мөлшерін анықтау қиын. Тығыздықтың біркелкі еместігі массивті жұлдыздардың гравитациялық коллапсы үшін маңызды екені анық. Біртекті емес тозаң коллапсы туралы егжей-тегжейлі талқылауды 1959 жылы Герман Бонди жүргізді. Сондықтан, тозаңның жалпы коллапс моделі кейде Леметр – Толман – Бонди коллапс моделі деп аталады[66].

Жоғарыда атап өткеніміздей, әдетте шынайы жұлдыздардың орталығы жоғары тығыздыққа ие болады, сыртқы бетіне қарай тығыздық баяу азаяды. 1979 жылы Дуглас Эрдли мен Ларри Смарр қысым ноль болған жағдайда осындай модель үшін сандық модельдеу жасады, ал 1984 жылы Деметриос Кристодулоу нақты математикалық талдау жасады. Бұл модель бойынша физикалық радиусы нөлге тең болатын орталықта тозаңды коллапстан жалаңаш сингулярлық пайда болатынын анықтады. Дегенмен, Ричард П.А.К. Ньюман бұл сингулярлықтың гравитациялық тұрғыдан әлсіз екенін көрсетті, өйткені кеңістік-уақыт қисықтығы сингулярлық жанында жеткілікті күшті болмайды[67].

Әрине, коллапс жағдайларын қарастыруда қысымы нольге тең емес және физикалық тұрғыдан үйлесімді күй теңдеулері бар жағдайларды қарастыру өте маңызды. Қысым коллапс кезеңдерінде маңызды рөл атқаруы мүмкін. Негізгі аспектілердің бірі - қысым градиенттері жалаңаш сингулярлықтың пайда болуына жол бермеу үшін гравитациялық коллапсқа жеткілікті түрде қарсы тұра алуы мүмкін. Күй теңдеулерін қосу арқылы қысымның коллапстанған нысанның

ішіндегі тығыздық пен температураға байланысын коллапс сценарийлерінің нәтижесі арқылы модельдеп, болжай алады.

Алайда, тығыздық біртекті болмаса да коллапс мүлдем басқаша дамиды. Бұл жағдайда бүкіл тозаң енді бір уақытта сингулярлыққа өтпейді, өйткені материяның тығыздығы енді біртекті емес. Заттың әртүрлі қабықшалары әр түрлі уақытта бірінен соң бірі сингулярлыққа жетеді, ал радиусы үлкенірек қабықтар кейінірек жетеді. Нәтижесінде, сингулярлық қалыптасу кезеңіне дейінгі бірде-бір кезеңде жарық сәулелері қамтылмайды, ал сәулелер мен бөлшектер кеңістік-уақыт сингулярлығына қаншалықты жақын болса да, аса тығыз аймақтардан шыға алмайды. Қамтылудың болмауы –жарық пен материяға гравитациялық өріс әсерінің жеткілікті шамада болмауынан туындайды, ондағы себеп - коллапстың белгілі кезеңде сингулярлықты тудыратын толық масса жеткілікті болмайды.



Сурет 2.3 – Жалаңаш сингулярлыққа әкелетін коллапс[68]

Мұнда көрсетілген кеңістік-уақыт диаграммасы, ОСД моделіне қолданылатын, тұрақты тығыздық профиліне қарағанда ортасында жоғарырақ тығыздық профилі бар тозаң коллапсы диаграммасына сәйкес келеді [68]. Бірақ, мұнда гравитациялық тартылыс біртекті емес. Оң энергия тығыздығы сияқты бастапқы шарттар негізінде басталады. Бұл жағдайда, оқиға көкжиегі кейінірек, яғни сингулярлық қалыптасу кезеңінде ғана қалыптасады, ал сингулярлық пайда болған алғашқы оқиға сингулярлықтан шығатын көптеген шексіз жарық сәулелерімен көрінеді. Қара құрдымның сәйкес жағдайымен салыстыру (2.3-сурет) бұл жағдайда горизонт сингулярлықтан әлдеқайда ертерек қалыптасқанын көрсетеді[66-68].

Дәлірек айтатын болсақ, орталықтағы жоғары тығыздықтың әсерінен, қамтылған беттердің пайда болуын баяулатады. Сондықтан оқиға көкжиегі коллапстан пайда болған сингулярлықты толық қамтып үлгірмейді.

Қарапайым сөзбен айтқанда, егер коллапс кезінде белгілі бір факторларды қосу жалаңаш сингулярлықтардың пайда болуына жол бермейтінін тапсақ, бұл цензура гипотезасын дәлелдеуге көмектеседі. Бұл тек математикалық тұжырымдарға сүйенбей, гипотеза үшін физикалық негіз ұсына алады. Көптеген әртүрлі коллапс сценарийлері мен модельдері зерттелді және негізгі қорытынды жұлдыздың бастапқы тығыздығы мен қысымына байланысты коллапс қара құрдымға немесе жалаңаш сингулярлыққа әкелуі мүмкін.

Жақынғы жылдарда коллапстанатын жұлдыздың соңғы нәтижесі көптеген физикалық тұрғыдан негізделген коллапс сценарийлерінде жалаңаш сингулярлық болуы мүмкін екенін көрсететін бірнеше маңызды оқиғалар болды.

Қара құрдымдар мен жалаңаш сингулярлықтардың болуы гипотетикалық болса да, іргелі физика мен космологияның қызықты саласы болып табылады. Егер жалаңаш сингулярлықтар массивті жұлдыздардың коллапсынан пайда болатыны дәлелденсе, бұл біздің Ғаламдағы жоғары энергиялық құбылыстарды түсінуімізге терең әсер етіп, табиғаттың іргелі теорияларын қайта қарауды талап етер еді. Соңғы кездегі теориялық және бақылау жетістіктері бұл мәселелерді бірінші орынға шығарды, бұл саладағы зерттеулер мен жаңалықтарды жалғастырудың қажеттілігін көрсетеді.

Нөлден өзгеше қысымдағы коллапс

Физикалық тұрғыдан алғанда, жұлдыздың коллапсы кезінде, әсіресе оның кейінгі кезеңдерінде нөлден өзгеше қысым өте маңызды екені анық. Астрофизикалық деңгейде, массивті жұлдыз ішіндегі ядролық жану нәтижесінде пайда болатын ішкі қысым азайған кезде оның үздіксіз гравитациялық коллапсқа ұшырайтыны анық. Коллапс дамыған сайын қысымның маңызы арта түседі, әсіресе кейінгі кезеңдерде өте маңызды рөл атқаруы мүмкін. Алайда, зерттеулер нөлден өзгеше қысымның нәтижеге онша әсер етпейтінін көрсетті, өйткені жалаңаш сингулярлықтар да, қара құрдымдар да коллапстың соңғы күйлері ретінде дамиды. Тек бастапқы тығыздық қана коллапстың соңғы күйін анықтайды, ал соңғы күй - параметрлердің комбинациясы арқылы анықталады.

Нөлден өзгеше қысымды қолдану кезінде коллапс үшін негізгі принцип өзгеріссіз қалады, атап айтқанда, берілген радиуста жалпы масса жалаңаш сингулярлық немесе қара құрдым пайда болғанына қарамастан жарықты қамтуды анықтайды. Дегенмен, жалпы массаны есептеу қосымша параметрлерді қосуға байланысты күрделірек болады. Бір қызығы, бұл жалаңаш сингулярлықтар да, қара құрдымдар да қысым нөлге тең болмаса да пайда болатынын көрсетеді[64,65].

Тозаңды материя коллапсының бұрынғы моделдері қысымды ескермейді, коллапстың динамикалық эволюциясын түсіну үшін модельдерде қысымды ескеретін коллапстың жалпы модельдері қолданыла бастады. Алайда, толық жалпы шарттарға сәйкес кететін Эйнштейн өріс теңдеулер жүйесінің жалпы шешімін табу мүмкін емес, оның басты себебі бұл теңдеулер сызықты емес, дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі болып табылады.

Нөлден өзгеше қысыммен гравитациялық коллапс модельдерін соңғы жылдары көптеген ғалымдар талқылап, егжей-тегжейлі зерттеді. Джулио Магли, Роберто Джаамбо және Италиядағы әріптестері, Жапониядағы Кен-ичи Накао және т.б. Олар жалаңаш сингулярлықтардың соңғы нәтиже ретінде қалай дамитынын көрсетті. Бұлт ішіндегі тығыздық пен қысымның қалай байланысатынын анықтайтын, нақты күй теңдеуі бар бірнеше модельдер зерттелді. Сондай-ақ, Кейл Лейк және оның әріптестері ұқсас нәтижелерге қол жеткізу үшін әртүрлі коллапс сценарийлерін қарастырды, ал Томохиро Харада мен Санджай Джинган идеалды сұйықтық модельдерін зерттеді[65,66].

Тек қана қысымды ескертін, ең қарапайым жағдайларда Эйнштейн теңдеулерін толық интеграциялау мүмкін емес. Сонымен, бұл мәселені шешу үшін Pankaj S. Joshi және оның әріптестері мынадай әдістерді қолданады [68]. Олар алдымен сфералық коллапсты зерттеу үшін Эйнштейн теңдеулерінің жалпы құрылымын қарастырды. Содан кейін, қозғалыс теңдеулерін беретін бірінші реттік интегралдарын алу қарастырылады. Моделдерге қажетті регулярлық және энергетикалық шарттар енгізіледі, бұл физикалық тұрғыдан мағынасы бар модельдерді алуға бағытталады. Содан кейін, коллапстың соңғы кезеңдері зерттеледі, сол негізде, соңғы нәтиже қара құрдым немесе жалаңаш сингулярлыққа алып келетін негізгі шешуші элементтер анықталады.

Қорытындылай келе, коллапстанған жұлдыздың ішіндегі қысымы нөлге тең емес сфералық коллапс үшін типтік нәтиже: материяның жалпы формасы бар гравитациялық коллапс модельдері бағытталған сәулелену, тозаңды және идеалды сұйықтықтар сияқты модельдермен бірге гравитациялық коллапстың соңғы нәтижесіне қатысты кейбір жалпы заңдылық пайда болады. Негізінен, жалаңаш сингулярлықтың пайда болуы Эйнштейннің өріс теңдеулері үшін бастапқы шарттарды таңдаумен байланысты, материяның құрамына байланысты бастапқы шарттарды нақты таңдау - сингулярлықтардың оқиға көкжиегінің артында жасырын қалуын немесе сыртқы бақылаушыларға көрінетінін анықтауда шешуші рөл атқарады.

Күй теңдеулері және коллапс

Күй теңдеуі (КТ) шын мәнінде қысым, энергия тығыздығы және температура сияқты жүйені сипаттайтын әртүрлі физикалық шамалар арасындағы байланысты көрсететін анықтаушы қатынас болып табылады. Материалдық бұлттардың немесе жұлдыздардың коллапсы жағдайында күй

теңдеуі өте маңызды, өйткені ол қысымның энергия тығыздығына қатынасын анықтайды.

Жұлдыздардың тепе-теңдік кезеңінде КТ олардың ішкі құрылымы мен сипатын анықтауда негізгі рөл атқарады. Бұл сипаттама тек классикалық механикада ғана емес, сонымен қатар, кеңістік-уақыттың қисықтығы материя мен энергия динамикасына әсер ететін жалпы салыстырмалылық шеңберінде де қолданылады[66].

Жұлдыздың ішіндегі ядролық отын таусылғанда, гравитациялық күштер мен ядролық синтез арасындағы тепе-теңдік бұзылып, гравитациялық коллапсқа әкеліп соғады. Бұл коллапс кезінде жүйені сипаттайтын физикалық шамалар, соның ішінде қысым, тығыздық, температура және басқа да термодинамикалық айнымалылар бастапқы тепе-теңдік мәндерінен өзгереді.

Жұлдыздың өмір сүру ұзақтығымен салыстырғанда, әдетте коллапс өте қысқа уақыт ішінде орын алатындықтан, күйдің бастапқы конфигурациясы мен теңдеуі коллапстың алғашқы кезеңдерінде жарамды деп болжауға болады. Қысымның, тығыздықтың және басқа да сәйкес шамалардың мәндерін тікелей тепе-теңдік моделінен алуға болады, өйткені олар коллапстың бастапқы шарттарын үйлесімді жуықтауды қамтамасыз етеді.

Сонымен қатар, бұл шамалар әдетте газдың температурасы және молекулалық салмағы сияқты негізгі термодинамикалық айнымалылар арқылы көрсетіледі.

Мысалы, зерттеушілер қысымдары изотропты болатын идеалды сұйықтықтың коллапысын қарастырды. Динамикалық қозғалыстар бастапқы шарттармен толығымен анықталады, сондықтан қозғалыс теңдеуін шешу теңдеулер жүйесін толықтай шешуге тең[64].

Политропты күй теңдеулері әртүрлі астрофизикалық жүйелерге кеңінен қолданылады. Бұл теңдеулер қысымды энергия тығыздығына тікелей байланыстырады, оларды гравитациялық коллапстың аналитикалық және сандық зерттеулеріне қолдануға ыңғайлы. Осындай күй теңдеулерімен сипатталған жүйелерді зерттеу - қара құрдымдар немесе жалаңаш сингулярлықтар пайда болуына әкелетін коллапстың соңғы нәтижелері туралы құнды ақпарат береді.

Күй теңдеуін енгізу Эйнштейннің өріс теңдеулер жүйесін тұйықтайды, сондықтан теңдеулер саны мен белгісіздер саны бірдей болады. Сызықты күй теңдеуі бар, идеалды сұйықтықтың гравитациялық коллапысын Ритупарно Госвами зерттеп, бастапқы шарттар мен бөлшектердің жылдамдығының таралуына байланысты, қара құрдымдар да, жалаңаш сингулярлықтар да коллапстың соңғы ықтимал нәтижелері бола алатынын көрсетті[68].

Бұл жерде назар аударатын қызықты жайт, Гравитациялық коллапс кезінде күй теңдеуінің өзгеру мүмкіндігі. Ол нейтрондық жұлдыз материясының

ядролық қанығу шегіне жеткен кездегідей, кейбір фазалық ауысулар кезіндегідей күрт өзгеруі мүмкін. Шындығында, соңғы оқиғалар сингулярлықтың пайда болуының жанында күшті теріс қысымның пайда болуы мүмкін екенін көрсетеді және гравитациялық өріс кері әсер етуі мүмкін (Repulsive), осылайша коллапстанып жатқан бұлтты бұзып, коллапстанып жатқан материяны таратады. Бұл экстремальды гравитациялық ортадағы классикалық және кванттық әсерлердің өзара әрекеттесуін көрсетеді[67].

Шынында да, классикалық режимнен кванттық режимге көшу - гравитациялық коллапс кезіндегі материяның сипатына айтарлықтай әсер етуі мүмкін. Классикалық ойлар теріс қысымның және оның салдарының мүмкіндігін меңзесе де, кванттық түзетулер бұл әсерлерді күшейтеді, бұл классикалық болжаудан айқын ауытқуларға әкеледі. Күй теңдеуінің коллапс кезінде күрт өзгеретінін байқау - оның негізінде жатқан физиканың күрделілігін көрсетеді.

Күшті теріс қысымның әлеуеті дәстүрлі сызықтық және политропты күй теңдеулері ықшам объектілердің физикасын жеткілікті түрде түсіндіре алмайтынын білдіреді. Бұл гравитациялық коллапс кезіндегі төтенше жағдайларды есепке алатын күрделі күй теңдеулерін жасау қажеттілігін көрсетеді. Бұл мәселелерді шешу ықшам астрофизикалық объектілердің динамикасын түсінуді жақсарту үшін өте маңызды.

Жоғарыдағы айтылғандарды ескере отырып, мынадай таңдау жасауға болады: күй теңдеуінен мүлдем бас тарту немесе күйдің экзотикалық теңдеулерін қарастыру. Соңғыларының ішінде Чаплын газы деп аталатын экзотикалық қасиеттері бар газдар қараңғы энергия мен қараңғы материяның ықтимал көздерін түсіндіру үшін қарастырылды. Әрине, қараңғы энергия әсерлерінің жұлдыздық масштабтағы коллапсқа қатысты болуы екіталай, бірақ олар үлкенірек нысандар үшін маңызды болуы мүмкін, мысалы, галактикалардың орталықтарында өмір сүретін және көптеген миллиондаған күн массаларына тең массасы бар ықшам нысандар.

Космологиялық тұрақты және коллапс

Нөлден өзгеше қысым кезіндегі коллапсты қарастырғанда, Эйнштейннің өріс теңдеулеріне енгізген космологиялық тұрақтының рөлі туралы сұрақ туындауы заңды, ол қосымша тұрақты ретінде пайда болады деп қарастырылады. Дегенмен, қараңғы энергия және Ғаламның үдеуі туралы соңғы мәліметтерді ескере отырып, нөлдік емес космологиялық тұрақтысы бар жағдайларды қарауға болды. Космологиялық тұрақтының рөлі негізінен вакуумның энергия тығыздығы болып табылады, және оның оң немесе теріс таңбасына байланысты ол оң немесе теріс қысым жасай алады.

Зерттеушілер, гравитациялық коллапсты нөлге тең емес космологиялық тұрақтымен зерттеді. Нәтижелер массивті жұлдыз сияқты ықшам нысан коллапстанған кезде, заттың тығыздығы әдетте вакуумның энергия

тығыздығынан әлдеқайда асып түсетінін көрсетеді[65,69]. Демек, қара құрдым немесе жалаңаш сингулярлық тұрғысынан, соңғы коллапс күйлері өзгеріссіз қалады. Дегенмен, өте аз бастапқы тығыздығы бар өте үлкен тозаңды бұлт үшін космологиялық тұрақты маңызды болуы мүмкін, ал ол оң болғанда кейде бұлттың серпілуіне себеп болады.

Сфералық емес коллапс

Жалпы қысымы бар материя өрісі үшін сфералық коллапсты жақсы зерттелген болса да, сфералық емес коллапс әлі де толық зерттелмеген. Жүргізілген зерттеулер жалаңаш сингулярлықтарды тудыратын сфералық емес моделдерді ашты. Сфералық симметриялы емес гравитациялық коллапстың соңғы нәтижесі қандай болады? Массивті жұлдыздың сфералық коллапысының негізгі фазалары әдетте тепе-теңдіктің бұзылуы, материяның жарылуы және одан кейін оқиғалар көкжиегі мен шексіз тығыздық пен қисықтықтың шексіз гравитациялық күштері бар кеңістік-уақыттық сингулярлықтар қалыптасуы болып табылады. Бұл сингулярлықтар көкжиектермен толығымен жабылуы мүмкін немесе жабылмауы мүмкін.

Сфералық симметрияның ауытқуы үлкен болған кезде және коллапс сфералық емес болғанда көкжиектер пайда бола ма деген мәселе туындайды. 1972 жылы Кип Торн сфералық симметрия болмаған жағдайда шексіз цилиндрлердің коллапысын жалпы салыстырмалық теориясында оқиғалар горизонттарымен қамтылмаған жалаңаш сингулярлықтарды тудыратынын көрсетті. Бұл жағдай Торнды асимптотикалық жазық кеңістіктегі соңғы жүйелер үшін сфералық емес коллапстың соңғы тағдырын сипаттайтын келесі құрсау гипотезасын ұсынуға итермеледі (hoop conjecture): Гравитация горизонттары, егер масса M массасы C шеңбері барлық бағытта бағынатын аймаққа тығыздалғанда ғана қалыптасады [70]. $C \leq 2\pi(2GM/c2)$, мұндағы G – Ньютонның гравитациялық тұрақтысы және c – жарық жылдамдығы.

Құрсау гипотезасы – физик Кип Торн ұсынған жалпы салыстырмалылық тұжырымдамасы. Ол коллапстанған нысанның қара құрдым құрайтын уақытын анықтау үшін критерийді ұсынады. Негізгі идея мынада: егер M массасын $2\pi R$ шеңберінің ішінде сығуға болатын болса, мұндағы R массаны қоршай алатын ең кіші шеңбердің радиусы болса, онда $R \leq 2GM/c^2$ болғанда ғана қара құрдым пайда болады, мұндағы G гравитациялық тұрақты , M - масса, c - жарық жылдамдығы[63].

Қарапайым сөзбен айтқанда, құрсау гипотезасы, егер объектінің массасы жеткілікті кішкентай шеңберде жеткілікті түрде қысылса, гравитациялық күш барлық ішкі күштерді жеңіп, объектінің қара құрдымға айналуына әкеледі деп болжайды. Бұл гипотеза гравитациялық коллапс қара құрдымдардың пайда болуына әкелетін жағдайларды түсіну үшін пайдалы сапалық критерий береді. Дегенмен, бұл қатаң дәлел емес, эвристикалық дәлел екенін атап өткен жөн.

Осылайша, ғарыштық цензура гипотезасынан айырмашылығы, құрсау гипотезасы барлық жалаңаш сингулярлықтарды жоққа шығармайды, тек гравитациялық коллапс кезінде оқиға көкжиектерінің пайда болуы туралы белгілі бір мәлімдеме жасайды. Сондай-ақ құрсау гипотезасы жалаңаш сингулярлықтарды емес, оқиғалар көкжиектерінің қалыптасуына қатысты. Осылайша, тіпті оқиға горизонттарының қалыптасуы, мысалы, сфералық симметриялы жағдайда, жалаңаш сингулярлықтардың болуын жоққа шығармайды.

Бұған қоса, гамма-метрика деп аталатын кеңістік-уақыттарының кластары бар, олар жалаңаш сингулярлықтарды мойындайтын сфералық емес кеңістік-уақыт және бұл модельдер біршама егжей-тегжейлі талданған. Дегенмен, сфералық емес коллапстың динамикалық эволюциясы әлі де негізінен анықталмаған аумақ екенін атап өткен жөн.

Ғарыштық цензура контекстіндегі жалаңаш сингулярлықтар туралы пікірталас қызықты және күрделі. Бұл формализм ең алдымен сфералық коллапсқа қатысты болғанымен, бұл сценарийлерді олардың кеңірек астрофизикалық салдары тұрғысынан қарастыру өте маңызды. Бұл коллапс модельдерін талдау терең астрофизикалық салдарларға әкелуі мүмкін жалаңаш сингулярлықтардың пайда болу механизмдері туралы құнды ақпарат береді. Дегенмен, қазіргі модельдер жалаңаш сингулярлықтар физикасын зерттеу үшін жеткілікті ме, әлде күрделі сандық модельдер қажет пе деген пікірталастар бар.

Жалаңаш сингулярлықтардың әртүрлі ауытқуларға тұрақтылығы мәселені одан әрі қиындатады. Ядролық коллапстың сандық үлгілерінің қарқынды дамуына қарамастан, ашылған сингулярлықтардың тұрақтылығын толық түсінуге қол жеткізу қиын болып қала береді. Бұл жағдайларды «типтік» деп санауға болатынына қарамастан, бастапқы шарттардағы кішігірім ауытқулар бірдей нәтижелерге әкелетіндіктен, олардың тұрақтылығының әлі де қатаң дәлелі жоқ.

Жалаңаш сингулярлықтар төңірегіндегі жұмбақтарды және олардың гравитациялық күші мен ғарышты түсінуімізге тигізетін салдарын ашу үшін әрі қарай теориялық және сандық зерттеулер қажет.

Сфералық емес коллапстың соңғы нәтижесі туралы мәселе біздің жалаңаш сингулярлықтар туралы түсінігімізге күрделіліктің тағы бір деңгейін қосады. Сфералық емес коллапс сценарийлері деформация мен айналудың ескеруді де қамтиды, бұл Эйнштейн теңдеулерінің математикалық сипаттамасын айтарлықтай қиындатады.

Квазисфералық және цилиндрлік коллапсты зерттеуге әрекеттер жасалғанымен, мұндай модельдердің физикалық маңыздылығы біршама түсініксіз болды. Тұтастай алғанда, сфералық емес коллапсты зерттеу әлі де маңызды прогресті қажет ететін сала болып табылады. Аналитикалық әдістер

мен сандық моделдеудегі жетістіктер сфералық емес гравитациялық коллапс динамикасы мен салдарын жақсырақ түсіну үшін маңызды болады.

Сфералық емес коллапсты түсіну ғарыштық цензураның контекстінде өте маңызды, әсіресе қара құрдымдар олардың массасы, заряды және бұрыштық импульсімен ғана сипатталады деп айтатын “шашы жоқ” теореманың салдарына қатысты.

Егер коллапстанып жатқан бұлт өзінің сфералық емес пішінін сақтаса, соңғы вакуум конфигурациясы Шварцшильд немесе Керр геометриясына сәйкес келмеуі мүмкін. Бұл Вейл класы немесе Томиматсу-Сато шешімдері сияқты осьтік симметриялы вакуумдық кеңістікте көрінетін жалаңаш сингулярлықтардың мүмкіндігін ашады[69].

Осы қиындықтарға қарамастан, зерттеулер сфералық симметрияның аздаған бұзылулары кезінде қара құрдымдар немесе жалаңаш сингулярлықтар болсын, соңғы коллапс нәтижелері тұрақты болуы мүмкін деп болжайды. Бұл тұрақтылық гравитациялық физикадағы сфералық емес коллапс динамикасы мен салдарын ашу үшін үздіксіз зерттеулердің қажеттілігін көрсетеді.

2.3 Деформацияланған жалаңаш сингулярлықтардың гравитациялық өрісі

Біз сфералық симметриядан мардымсыз ауытқыған массалық үлестірулердің гравитациялық өрісін сипаттайтын Эйнштейн теңдеулерінің белгілі бір жуық шешімдерін қарастырамыз. Сфералық симметриядан ауытқу горизонтсыз сингулярлықтың пайда болуына әкеледі яғни жалаңаш сингулярлықты сипаттайды және ондағы деформация квадруполь параметрі арқылы сипатталады. Біз осы жалаңаш сингулярлықтың гравитациялық өрісіндегі сынақ бөлшектерінің қозғалысын зерттеу арқылы квадрупольдық параметрдің Шварцшильд траекторияларының қасиеттеріне қалай әсер ететінін қарастырамыз.

Табиғаттағы жалаңаш сингулярлықтардың болуы бүгінгі күні қызу пікірталастың тақырыбы болғанымен, гравитациялық өріс үшін Эйнштейннің өріс теңдеулері жалаңаш сингулярлықтардың сипаттамасы болатын шешімдерді қабылдайтыны жақсы дәлелденген. Атап айтқанда, жалаңаш сингулярлық қара құрдым шешімдерінің аналогтарының болуымен сипатталады[71]. Дегенмен, жалаңаш сингулярлықтарды қалыптастыру үшін, табиғатта қажетті нақты шарттарды таңдау қиын болуы мүмкін. Шынында да, айналмалы жалаңаш сингулярлық өзінің массасынан (геометриялық бірліктерде) үлкен болатындай белгілі бір бұрыштық импульсті қажет етеді, ол бұл нақты конфигурацияларда орындалуы мүмкін емес шарт, себебі объект ондай үлкен бұрыштық жылдамдыққа жеткенге дейін өзін-өзі жойып жібереді[70]

Дегенмен, жалаңаш сингулярлықтарды қалыптастырудың қарапайым тәсілі бар, атап айтқанда квадруполь моменті бар массалық үлестірулерді қарастыру

[71]. Шынында да, мультипольдік моменттер тұрғысынан қарастыратын болсақ, бірегейлік теоремасы қара құрдымдардың тек массалық монопольды және бұрыштық дипольдік моментіне ие болуы мүмкін екенін дәлелдейді [72]. Демек, массалық үлестіруге квадрупольді қосу, тіпті статикалық жағдайда да, сәйкес гравитациялық өріс жалаңаш сингулярлықты сипаттауы мүмкін. Демек, массалық тараудың сфералық симметриядан мардымсыз ауытқуы жалаңаш сингулярлықтардың пайда болуына әкеледі. Бірнеше жұмыстарда [44,47,71,73] біз жалаңаш сингулярлықтардың физикалық қасиеттерін зерттеу үшін дербес статикалық квадрупольдық шешімдер[74–79] зерттелді.

Квадрупольдық моментті, статикалық массалық таралудың сыртқы гравитациялық өрісін сипаттау үшін қолданылатын Эйнштейн өріс теңдеулерінің бірнеше шешімдері бар[80-85]. Шекті жағдайда, квадрупольдық моментінің жойылуы Шварцшильд қара құрдымының кеңістік уақытын береді. Олардың барлығының қызықты сипаттамасы мынада: ең сыртқы жалаңаш сингулярлық радиусы $r = 2m$ шар болып табылады, мұндағы m - гравитациялық көздің массасы. Мұнда квадрупольдық моменттің болуы кәдімгі көкжиектің бұзылуына әкеліп соғады және оны сингулярлы гипербетке айналдырады деп түсіндіруге болады.

Бұл бөлімде, біз бұл сингулярлықтың яғни көкжиектің әрдайым орындала бермейтінін көрсетеміз. Жұмыста, сингулярлығы $r = m$ радиусы сферада орналасқан жаңа шешімді аламыз. Бұл шешім Квадрупольдің $r = 2m$ кезіндегі қалыпты көкжиекті толығымен бұзатынын, бірақ $r = m$ кезінде сингулярлықты қамтитын жаңа арнайы гипербеттерді тудыратынын білдіреді. Бұл жаңа шешімді алу үшін біз нақты жағдайларда, астрофизикалық ықшам объектілер сфералық симметриядан мардымсыз ғана ауытқыйды деген фактіні қолданамыз. Бұл квадрупольдің мәні мардымсыз шамада деп қарастыруға болатынын білдіреді. Осыны ескере отырып, біз квадрупольдық параметрдің бірінші реттік дәрежесіне дейінгі жуықтауды ескеріп, жуықталған сызықтық элементті зерттейміз. Содан кейін, Эйнштейннің сәйкес вакуумдық өріс теңдеулерінің жалпы шешімін табамыз және нақты шешім $r = m$ радиусы бар сферада орналасқан қисықтық сингулярлықпен сипатталатынын көрсетеміз.

Сызықтық элемент және өріс теңдеулері

Эйнштейн теңдеулерінің физикалық мағыналы шешімдерін іздеу және зерттеу сәйкес сызықтық элементті таңдаудан басталады. Деформацияланған массалық таралулардың статикалық гравитациялық өрістерін зерттеуде, өрістер осьтік симметрияны сақтайды деп болжауға болады. Оның үстіне, егер біз массалық үлестірімнің гравитациялық өрісін сыртында да, ішіндегі де сипаттауға мүдделі болсақ, екі жағдайда да қолдануға болатын сызықтық элементін таңдау ыңғайлы. Біз [84] жұмыста квадрупольдық момент мардымсыз аз деген болжаммен, сыртқы вакуумдық шешімдермен сәйкестендірілетін ішкі идеал

сұйықты шешімдерді таптық. Физикалық тұрғыдан алғанда, бұл мардымсыз деформациялану массаның сфералық симметриялы емес таралуын білдіреді. Ішкі және сыртқы жуықталған шешімдерді табу үшін қолданылатын сызықты элементті мына түрде жазуға болады:

$$ds^2 = e^{2\upsilon}\left(1+qa\right)dt^2 - \left(1+qc+qb\right)\frac{dr^2}{1-\frac{2\tilde{m}}{r}} - \left(1+qa+qb\right)r^2 d\theta^2 - \\ -\left(1-qa\right)\sin^2\theta d\varphi^2 \qquad (2.1)$$

мұндағы (t,r,θ,φ) координаттар жиынын және метрикалық функциялар $\nu=\nu(r), a=a(r), \tilde{m}=\tilde{m}(r), b=b(r,\theta)$. Шекті жағдайда $q\to 0$ кезінде бұл сызықтық элемент сфералық симметриялы кеңістік-уақыт метрикасы береді:

$$\tilde{m}=m=const\,,\ e^{2\upsilon}=1-\frac{2m}{r}\ . \qquad (2.2)$$

Егер, сфералық жағдайда, идеал сұйықты өріс көзі үшін қарастырсақ, онда ішкі Шварцшильд метрикасын алуға болады:

$$\tilde{m}=4\pi\rho R^3,\ p=\frac{3m}{4\pi R^3}\frac{\left[f(r)-f(R)\right]}{\left[3f(R)-f(r)\right]} \qquad (2.3)$$

$$e^{2\upsilon}=\left[\frac{3}{2}f(R)-\frac{2}{3}f(r)\right]^2,\ f(r)=\sqrt{1-\frac{2mr^2}{R^3}} \qquad (2.4)$$

Мұндағы $\rho=const.$ және $p=p(r)$ сәйкесінше сұйықтықтың тығыздығы мен қысымы. Бұл жағдайда, сфералық формаға ие жұлдыздар моделі үшін арнайы таңдап алынған күй теңдеулерімен қоса өріс теңдеулерін қарастыруға болады, сонымен қатар, Шварцшильд сыртқы метрикасы сфера бетінде жымдастыру шарты ретінде пайдаланылады.

Мұнда біз жалпы жағдайда, жуық шешімдерді іздеу үшін жоғарыдағы (2.1) сызықтық элементінің мүмкіндіктерін пайдаланамыз. Сыртқы өріс жағдайдыда, Эйнштейннің вакуумдық өріс теңдеулері q параметрі бойынша бірінші ретке дейін жуықталғанда мына түрінде жазылады:

$$\tilde{m}_{,r} = 0,\ \tilde{m} = m = const, \tag{2.5}$$

$$\upsilon_{,r} = \frac{m}{r(r-2m)}, \tag{2.6}$$

$$(r-m)(a_{,r} - c_{,r}) + (a-c) = 0, \tag{2.7}$$

$$2r(r-2m)a_{,rr} + (3r-m)a_{,r} + (r-3m)c_{,r} - 2(a-c) = 0, \tag{2.9}$$

$$(r^2 - 2mr + m^2\sin^2\theta)b_{,\theta} + 2r(r-2m)(ma_{,r} - a + c)\sin\theta\cos\theta = 0 \tag{2.10}$$

$$(r^2 - 2mr + m^2\sin^2\theta)b_{,r} + 2(r-2m)(r - m\sin^2\theta)a_{,r} + 2(r-m)(a-c)\sin^2\theta = 0 \quad . \tag{2.11}$$

Мұндағы үтір белгісі сәйкес координатаға қатысты дербес туындыларды білдіреді. Ыңғайлы болу үшін, (2.5) теңдеудің шешімін $\tilde{m} = m = const$ барлық теңдеулердегі орнына қойылды.

Жуықталған шешімдер

Сонымен, (2.6)–(2.11) дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесін қарастырайық. (2.6) және (2.7) теңдеулер интегралданады және төмендегідей нәтижелер береді:

$$\upsilon = \frac{1}{2}\ln(1 - \frac{2m}{r}) + \alpha_1,\ a - c = \frac{\alpha_2 m^2}{(r-m)^2} \tag{2.12}$$

мұндағы α_1 және α_2 өлшемсіз интегралдау тұрақтылары.

Қалған дербес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің жалпы интегралдарын табуға болады және төмендегідей нәтижелерді береді

$$a = \frac{\alpha_2 m}{(r-m)} + \frac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_2)\ln(1 - \frac{2m}{r}) + \alpha_4, \tag{2.13}$$

$$c = \frac{\alpha_2 mr}{(r-m)^2} + \frac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_2)\ln(1 - \frac{2m}{r}) + \alpha_4, \tag{2.14}$$

$$b = \frac{2\alpha_2 m}{(r-m)} - (\alpha_3 - \alpha_2)[\ln 2 + \ln(1 - \frac{2m}{r} + \frac{m^2 \sin^2\theta}{r^2}) + \alpha_5 . \qquad (2.15)$$

мұндағы α_3, α_4 және α_5 өлшемсіз шамадағы интегралдау тұрақтылары[84].

Квадрупольдық моменті бар жалпы жуықталған сыртқы шешімдердің (2.12) – (2.15) өрнектерінен олардың 5 параметрге тәуелді шешімдер жиынымен берілгенін көреміз. Бұл жалпы шешімде α_4 және α_5 аддитивті тұрақтылардың мәндерін табу үшін сфералық координаталардағы шешімдердің шексіздікте Минковский кеңістік-уақытына айналатындай етіп таңдауға болады. Жалпы жағдайда, жоғарыда келтірілген шешімдердің ішінде асимптоталық жазық емес шешімдер де бар екенін байқауға болады.

Жуықталған квадрупольдық шешімдер (2.12-2.15) өрнектерінде көрсетілген. Бұл жалпы шешімдерде α_4 және α_5 тұрақтылардың мәндерін табу үшін сфералық координаталардағы шешімдердің шексіздікте Минковский кеңістік-уақытына айналатындай етіп таңдауға болады. Жалпы жағдайда, жоғарыда келтірілген шешімдердің ішінде асимптоталық жазық емес шешімдер де бар екенін байқауға болады.

Өстік симметриялы шешімдерді таңдап алудың жолы әр түрлі болуы мүмкін. Киллинг векторы ξ-ға қатысты $g_{\mu\nu}$ метрикалық тензорының Ли туындысын $L_\xi g_{\mu\nu} = \xi^\alpha \nabla_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu}\nabla_\mu \xi^\alpha + g_{\mu\alpha}\nabla_\nu \xi^\alpha$ ретінде есептеуге болады[31,86]. Метрикалық тензордың Ли туындысы $L_\xi g_{\mu\nu}$ нөлге тең болса, онда ξ^α арқылы пайда болған метрика айналу кезінде инвариантты екенін көрсетеді, бұл осьтік симметрияны білдіреді. Егер жорағырағы (2.1) өрнекті пайдаланып, Ли туындыларын есептесек онда, сфералық симметриялы болмайтын жағдай мына өрнекпен анықталады: $2a(r) + b(r) \neq 0$. Бұл өрнек Ли туындыларының нөлден өзге компоненттерінің коэффиценті. Жоғарыдағы шешімдерді пайдаланып, осы шарт орындалатындай етіп бес параметрді таңдап алсақ, онда алынған шешімдер сфералық симметриялы болмайды. Мысалы, тұрақты шамалар α_4 және α_5 нөлден өзгеше болғанда бұл шарт орындалады, және Ли туындылары есептегенде нөлден өзгеше компоненттері болады, яғни, жоғарыдағы жуықталған квадрупольдық метриканың асимптоталық жазық емес шешімдері сфералық симметриялы болмайды.

Табылған шешімдердің физикалық мағынасын зерттеу үшін, Кречман қисықтық скалярын қарастырамыз, оны мына түрде есептеуге болады:

$$k = R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}, \qquad (2.16)$$

$$K = \frac{48m^2}{r^6}\{1 + q[(\alpha_2 - \alpha_3)[\ln(1 - \frac{2m}{r}) - 2\ln(1 - \frac{2m}{r} + \frac{m^2 \sin^2\theta}{r^2}) - 2\ln 2]$$
$$+\alpha_2 A_1 + \alpha_3 A_2 - 2(\alpha_4 + \alpha_5) + \alpha_2 A_3] + Q(q^2), \quad (2.17)$$

$$A_1 = -\frac{1}{6(m^2 \sin^2\theta - 2mr + r^2)(m-r)^3 m^2}$$
$$\times[(12m^3 - 11m^2 r - 14mr^2 + 11r^3)m^4 \cos^2\theta \quad (2.18)$$
$$-(12m^3 - 17m^2 r - 2mr^2 + 5r^3)m^2 (m-r)^2],$$

$$A_2 = \frac{2m^2 \sin^2\theta - 3mr + r^2}{m^2 \sin^2\theta - 2mr + r^2}, \quad (2.19)$$

$$A_3 = -\frac{1}{6}\frac{r(7(m-r)^2 - 2r^2}{(m-r)^3}, \quad (2.20)$$

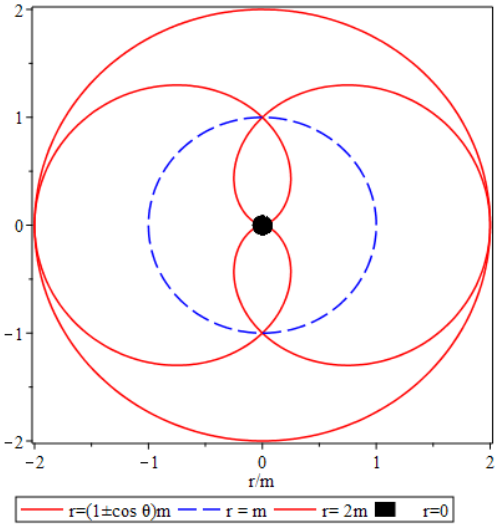
мұнда q^2 -қа пропорционалды мүшелер ескерілмейді. Бұл скалярдың математикалық құрылымын және Киллинг векторымен байланысты Ли туындыларын зерттеу арқылы, маңызды және ерекше шешімдерді табуға болады. Дербес жағдайлар диссертацияның соңындағы Қосымша Ә-де көрсетілген.
Сонымен, жоғарыдағы өрнектерден, жуықталған кеңістік уақытта нөлдік сингулярлықтан басқа үш түрлі қисықтық сингулярлықтары бар екенін байқаймыз. Олардың мәні төмендегідей:

$$r = 0, r = m, r = 2m, r = m(1 \pm \cos\theta). \quad (2.21)$$

(2.12), (2.13), (2.14) және (2.15) шешімдерінің қисықтық сингулярлықтарының геометриялық құрылымы 2.4-суретте көрсетілген.

Егер, жоғарыдағы жалпы шешімдегі тұрақтылардың мәндерін төмендегідей таңдап алсақ, онда жаңа шешімдер пайда болады:

$$\alpha_1 = 0, \alpha_3 = \alpha_2, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = 0. \quad (2.22)$$



Сурет 2.4 – (2.21) өрнектегі жалаңаш сингулярлықтардың геометриялық қасиеттері

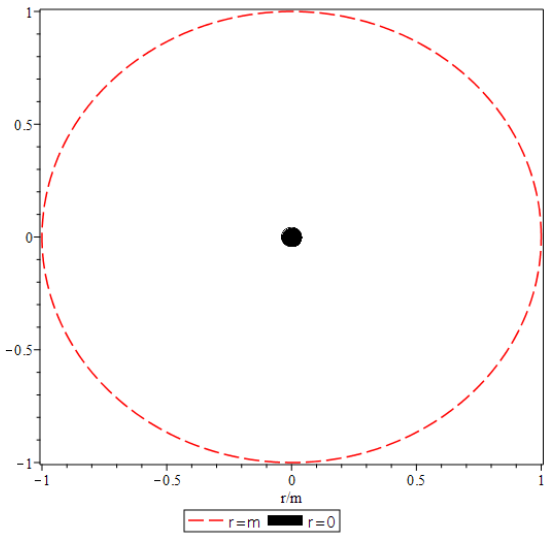
Осы мәндерге сәйкес, (2.1) сызықтық элементтің анық түрін жазамыз:

$$ds^2 = \left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(1-\frac{q\alpha_2 m}{r-m}\right)dt^2 - \left[1+\frac{q\alpha_2 m(r-2m)}{(r-m)^2}\right]\frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}}$$

$$-\left(1+\frac{q\alpha_2 m}{r-m}\right)r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2). \qquad (2.23)$$

Бұл шешім, *m, q* және α_2 параметрлері бар, асимптотикалық жазық, жуықталған Эйнштейн өріс теңдеулерінің вакуумдық шешімі болып табылады. α_2 әрқашан q-параметрімен мен бірге болатындықтан, оны *q* параметрімен бірге қарастыруға болады. Сондықтан, біз жалпы мағнасын жоғалтпайтындай етіп, бұл тұрақты шаманы $\alpha_2 = 1$ деп алуымызға болады. Сингулярлық құрылымын Кречман инвариантын талдау арқылы табамыз. Жоғарыдағы (2.23) сызықты элемент үшін ол төмендегідей түрге келеді:

$$K = \frac{48m^2}{r^6}\left(1+q\frac{r-4m}{r-m}\right)+Q(q^2). \qquad (2.24)$$



Сурет 2.5 – (2.24) өрнекке сәйкес екі сингулярлық

Бұл өрнектен, тек $r=0$ және $r=m$ де орналасқан екі сингулярлықтың бар екенін көреміз (2.5 - сурет). Осы тұрғыдан, бұл шешім өте қызықты болып табылады, олай дейтініміз, (2.12)–(2.15) өрнектерде қамтылған барлық шешімдерде сыртқы $r=2m$ гипербетінде сингулярлы болады. Оның үстіне квадрупольдық моментке ие барлық белгілі нақты шешімдердің $r=2m$ кезінде сингулярлығы бар екендігі белгілі[80]. Жоғарыдағы (2.23) шешім оқиға көкжиегі жоқ, сингулярлығы $r=2m$ ішінде орналасқан жалғыз шешім болып табылады. Бұл – кеңістік-уақыттың $r\in\left(m,2m\right]$ интервалында жақсы анықталатынын білдіреді.

Жоғарыдағы (2.23) шешімнің физикалық мағынасын одан әрі талдап ашыу үшін, сәйкес шешімнің Ньютондық шегін есептеуге болады. Осы мақсатта, төмендегідей координаталық түрлендірулер жасаймыз $(r,\theta)\to(R,\upsilon)$ [80]

$$r=R[1-q\frac{m}{R}[1+\frac{m}{R}(\beta_1+\sin^2\upsilon)+\frac{m^2}{R^2}(\beta_2-\sin^2\upsilon)+..]\sin^2\upsilon], \qquad (2.25)$$

$$\theta=\upsilon-q\frac{m^2}{R^2}[1+2\frac{m}{R}+..]\sin\upsilon\cos\upsilon], \qquad (2.26)$$

Бұл жердегі β_1 және β_2 тұрақтылар және біз m^3/R^3-тен жоғары реттік мүшелерін ескермейміз. Жоғарыдағы координаталарды (2.23) метрикаға қойып, жуықталған сызықтық элементті аламыз:

$$ds^2=(1+2\Phi)dt^2-\frac{dR^2}{1+2\Phi}-U(R,\upsilon)R^2(d\upsilon^2+\sin^2\upsilon d\varphi^2), \qquad (2.27)$$

жоғарыдағы белгіленген функциялар

$$\Phi = -\frac{GM}{R} + \frac{GQ}{R^3} P_2(\cos\upsilon), \tag{2.28}$$

$$U(R,\upsilon) = 1 - 2\frac{GM}{R^3} P_2(\cos\upsilon), \tag{2.29}$$

бұндағы $P_2(\cos\upsilon)$ – 2-реттік Лежендр көпмүшесі, және тұрақтылар белгілі Ньютондық параметрлерге сәйкес $\alpha_2 = 2$, $\beta_1 = 1/3$ және $\beta_2 = 5/3$ деп таңдадық.

Біз (2.27) метриканы (2.23) метриканың Ньютондық шегі деп есептейміз, мұндағы Φ функциясы Ньютондық потенциалды көрсетеді. Сонымен қатар, төмендегі тұрақтыларды, сәйкес Ньютондық массасы және квадрупольдық моменті ретінде түсіндіруге болады.

$$M = (1+q)m, Q = \frac{2}{3} qm^3 . \tag{2.30}$$

Қорыта келе, жоғарыдағы (2.23) жуықталған квадрупольдық метрика Эйнштейн вакуумдық өріс теңдеулерінің өстік симметриялы шешімі болып, оқиға көкжиегі жоқ, жалаңаш сингулярлықты сипаттайды, квадрупольдық параметрдің мағынасы Ньютондық жуықтауларда сәйкес квадрупольдық моментпен байланысты екендігін көреміз. Квадрупольдық моменттің болуы, қара құрдымдарды сипаттайтын метрикалармен салыстыра айтқанда, (2.23) метрика – сфералық симметриядан ауытқыған массалық таралудың сыртқы гравитациялық өрісін сипаттайтын мүмкіндіктерге ие.

2.4 Деформацияланған кеңістік-уақыттағы геодезиялық қозғалыстар

Жылдамдығы $u^a = dx^a / d\tau = \dot{x}^a$ 4-өлшемді жылдамдыққа ие, сынақ бөлшектің $x^\alpha(\tau)$ траекториясын қарастырайық. Бөлш ектің 4 өлшемді импульс моментін $p^\alpha = \mu \dot{x}^\alpha$ геодезиялық теңдеулер мен тұрақтылары келесідей болатындай етіп нормалаймыз

$$\ddot{x}^a + \Gamma_{bc}{}^a \dot{x}^b \dot{x}^c = 0, \tag{2.31}$$

$$g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b = \varepsilon. \tag{2.32}$$

Мұндағы тұрақты шама $\varepsilon = 0,1,-1$ сәйкесінше нөлдік, уақыт және кеңістік тәрізді геодезиялық сызықтарды білдіреді[81]. (2.30)-теңдеуді пайдаланып жуықталған метрика (2.23) үшін, геодезиялық қозғалыс теңдеулері жаза аламыз:

$$\ddot{t} + m[\frac{2}{r(r-2m)} + \frac{q}{(r-m)^2}]\dot{t}\dot{r} = 0, \tag{2.33}$$

$$\ddot{r} + [1 + \frac{q(6m^2 - 6mr + r^2)}{(m-r)^2}\frac{m(r-2m)\dot{t}^2}{r^3} - \frac{m}{2}[\frac{2}{r(r-2m)} + \frac{q(r-3m)}{(m-r)^3}]\dot{r}^2$$

$$-[r-2m-\frac{qm(r-2m)^2}{(r-m)^2}]\dot{\theta}^2 - (r-2m)\sin^2\theta[1-\frac{qm(r-2m)}{(r-m)^2}]\dot{\varphi}^2 = 0, \tag{2.34}$$

$$\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 + (\frac{2}{r} - \frac{qm}{(r-m)^2})\dot{r}\dot{\theta} = 0, \tag{2.35}$$

$$\ddot{\varphi} + [(\frac{2}{r} - \frac{qm}{(r-m)^2})\dot{r} + 2ctg\theta\dot{\theta})]\dot{\varphi} = 0. \tag{2.36}$$

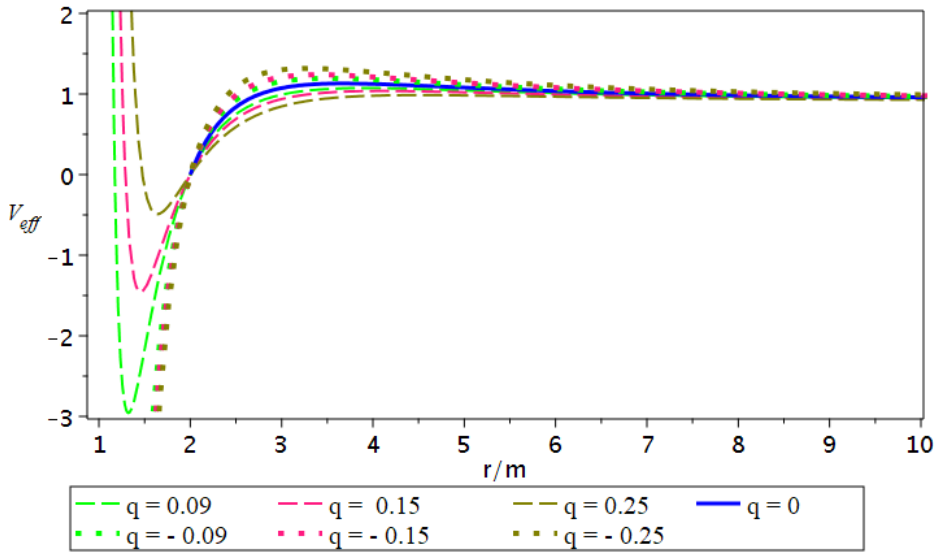
(2.32) өрнекті, және төрт өлшемді жылдамдықтың нормалау шартын $u^\alpha u_\alpha = -1$ пайдаланып, мынаны аламыз[82]:

$$(1 - \frac{qm^2}{(r-m)})\dot{r}^2 = \tilde{E}^2 - \Phi^2, \tag{2.37}$$

$$V_{eff} = \Phi^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left[r^2\dot{\theta}^2 + \left(\varepsilon + \frac{2l^2}{r^2\sin^2\theta}\right)\left(1 - \frac{qm}{(r-m)}\right) - \frac{l^2}{r^2\sin^2\theta}\right], \tag{2.38}$$

Бұл (2.23) кеңістік-уақыттағы тиімді потенциалдың өрнегі болып табылады. Қозғалыс тұрақтылары болып табылатын сынақ бөлшектің энергиясы мен бұрыштық импульсі үшін $E = \mu\tilde{E}$ және $l = \mu\tilde{l}$ белгілейміз, бұл тұрақтылар Киллинг векторлық өрістерімен $\xi_t = \partial t$ және $\xi_\phi = \partial\phi$ байланысты. Ыңғайлы болу үшін $\mu = 1$ мәнін пайдаланып, жоғарыдағы тұрақтыларды $E = \tilde{E}$ және $l = \tilde{l}$ етіп аламыз.

Тиімді потенциалдың экваторлық жазықтықтағы q параметрдің әр түрлі мәндердегі қасиеті төмендегі 2.6-суретте көрсетілген. Салыстыру үшін Шварцшильд кеңістік-уақытындағы тиімді потенциалы да көрсетілген. q- оң (теріс) мәндері үшін сыртқы сингулярлықтан тыс берілген нүктедегі тиімді потенциал әрқашан Шварцшильд мәнінен аз (үлкен) болады. Бұл (2.23) метриканың экваторындағы орбиталардың таралуы q мәніне түбегейлі тәуелді болуы мүмкін екенін көрсетеді.



Сурет 2.6 – Экваторлық жазықтықтағы уақыт тәрізді геодезияның тиімді потенциалы квадрупольдық параметрдің әртүрлі мәндері үшін радиустың функциясы ретінде көрсетілген. Мұнда біз нақтылық үшін l^2=20 деп алдық.

Дөңгелек орбиталар

Енді (2.23) жуықталған метрикамен сипатталған экваторлық жазықтықтағы $\theta = \pi/2$ дөңгелек орбиталардың қасиеттерін қарастырайық. Бұл жағдайда, дөңгелек қозғалысты сипаттау үшін орбиталар $\dot{r} = 0$ және $\dot{\theta} = 0$ шарттарын қанағаттандырады. Дөңгелек орбиталардағы қозғалыстың тұрақтылық қасиеттері тиімді потенциалдың экстремум мәндерімен анықтауға болады. (2.35) теңдеудегі тиімді потенциалды пайдаланып, мына есептеулер жасалды:

$$V_{eff,r} = \frac{2m\varepsilon}{r^2} + \frac{2(3m-r)l^2}{r^4} + \frac{qm}{r^2(r-m)^2}\left[\left(2m^2-4mr+r^2\right)\varepsilon + \frac{2(6m^2-10mr+3r^2)}{r^2}l^2\right], \quad (2.39)$$

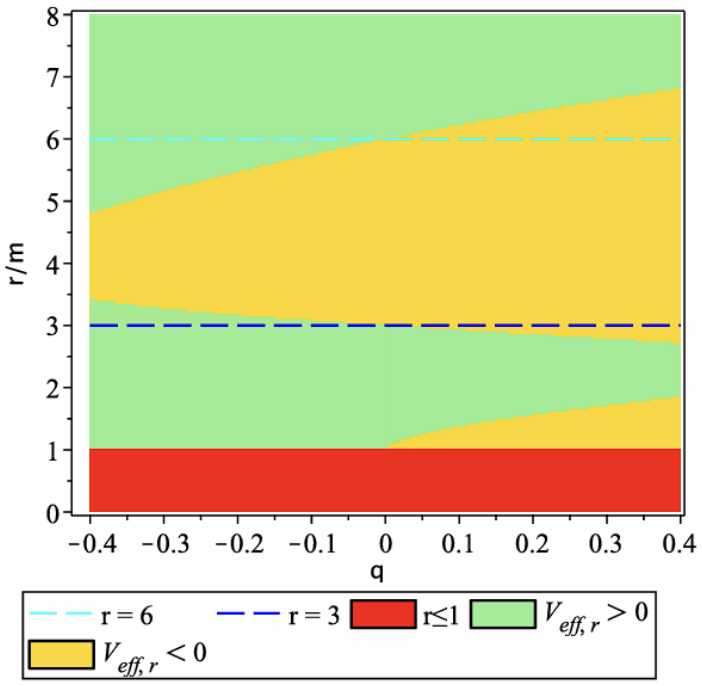
Екінші реттік туындысы:

$$V_{eff,rr} = B_1 + B_2, \tag{2.40}$$

Бұндағы белгілеулер мынадай:

$$B_1 = \frac{m(36m^4 - 90m^3 r + 74m^2 r^2 - 22mr^3 + 2r^4)}{r^3(3m^2 - 4mr + r^2)^2}, \tag{2.41}$$

$$B_2 = \frac{mq(36m^4 - 114m^3 r + 74m^2 r^2 - 17mr^3 + r^4)}{r^3(3m^2 - 4mr + r^2)^2}, \tag{2.42}$$



Сурет 2.7 – квадрупольдық параметрінің әртүрлі мәндері үшін радиусы r/m дөңгелек орбиталардың тұрақтылығын талдау. Жасыл (сары) нүктелер тұрақты (тұрақсыз) орбиталарды білдіреді. Қызыл аймақ сингулярлықтың ішінде жатыр

Есептеулерде ыңғайлылық үшін тұрақты шаманы $\varepsilon = 1$ деп алдық, сонымен бірге, дөңгелек орбиталар үшін бұрыштық моменттің төмендегі мәндерін барлық теңдеулерге қойдық

$$l^2 = \frac{\varepsilon m r^2}{(r-m)(r-3m)^2}\left[2(3m^2 - 4mr + r^2) + q(r^2 - 6m^2)\right]. \tag{2.43}$$

Тұрақтылық шарты $V_{eff,r} > 0$ бойынша сандық талдауы 2.7-суретте көрсетілген. Жасыл аймақ тек тұрақты орбиталарды қамтиды, ал сары аймақ тұрақсыз орбиталарға сәйкес келеді. Салыстыру үшін Шварцшильд кеңістік уақытының шекті мәндері бірге қарастырылған. Шварцшильд метрикасының ең кіші рұқсат етілген дөңгелек орбитаның радиусы ($r = 3m$) және ішкі ең тұрақты дөңгелек орбитаның радиусының ($r = 6m$) мәндерімен салыстырғанда квадрупольдық q параметрі осы мәндерді өзгертетінін көреміз.

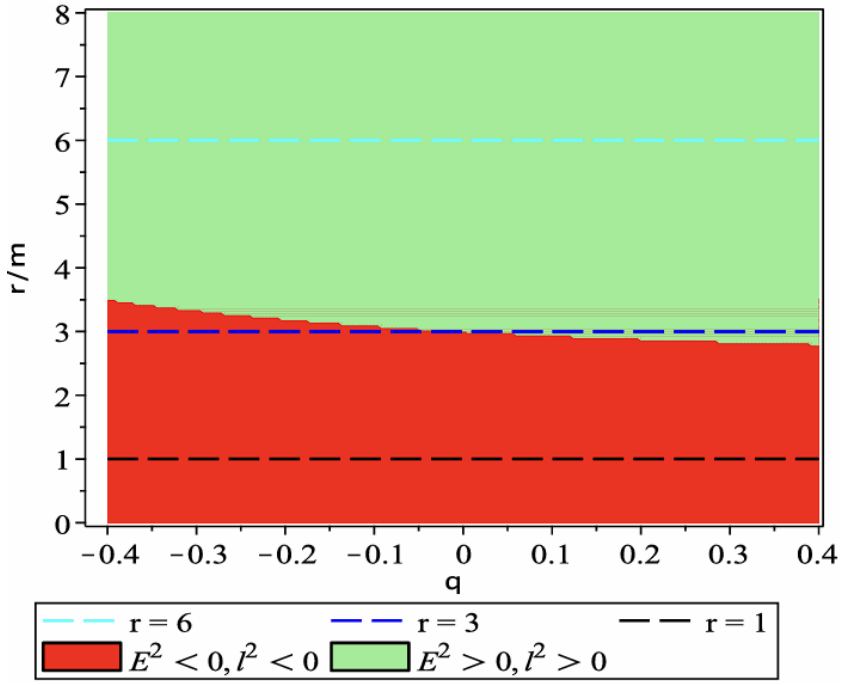
Шын мәнінде, квадрупольдық параметр $r = 3m$ радиустан төмен және жоғары екінші тұрақты орбиталар аймақтарын пайда болуына әкеледі, бұл Шварцшильд метрикасы жағдайында байқалмайтын аймақтар. Бұл аймақ $r = m$ орналасқан сингулярлыққа жақындай отырып, $r/m \approx 1$ мәніне жетуі мүмкін. Оның үстіне $r \in (r, 2m]$ интервалымен анықталатын кеңістік уақыт ішінде q оң мәндері үшін тұрақты дөңгелек орбиталардың болатынын байқаймыз.

Сонымен қатар, дөңгелек орбиталардағы сынақ бөлшектерінің энергиясын мына түрде көрсетуге болады

$$E^2 = \frac{\varepsilon\left(r-2m\right)^2}{r\left(r-3m\right)}\left(1-\frac{qm\left(r-6m\right)}{2\left(r-m\right)\left(r-3m\right)}\right). \qquad (2.44)$$

2.8-суретте E^2 энергиясы мен l^2 бұрыштық импульсі бір уақытта оң немесе теріс болатын аймақтар көрсетілген. Қызыл аймақ дөңгелек орбиталарға рұқсат етілмеген барлық радиустарды білдіреді, өйткені энергияның немесе бұрыштық импульстің квадраты теріс мәндер қабылдамайды. 2.7-суреттен айырмашылығы $r/m = 1$ және $r/m = 3$ сингулярлықтар арасындағы аймақ тұрақтылық шарты бойынша дөңгелек орбиталар үшін рұқсат етілгенін, бірақ энергия мен бұрыштық импульс квадраттарының оң болуы шарты негізінде тұрақты дөңгелек орбиталар болмайтынын көрсетеді.

Дөңгелек орбиталардың қасиеттеріне квадрупольдің әсері төмендегідей болады деген қорытындыға келеміз: Оң квадрупольдық параметр ең кіші рұқсат етілген радиустың ұлғаюына әкеледі, ал теріс квадрупольдық параметр керісінше әсер етеді. Бұл тек орталық объектінің созылыңқы жағдайында $r = m$ де орналасқан сингулярлыққа жақын орбиталарда ғана сынақ бөлшектердің қозғалысына рұқсат етілгенін білдіреді.



Сурет 2.8 –. Радиусы r/m және q квадрупольдық параметр бойынша дөңгелек орбиталардағы сынақ бөлшектерінің E^2 энергиясы және l^2 бұрыштық импульс бойынша тұрақты дөңгелек орбиталардың болуы шарты

Дөңгелек орбиталар үшін сәйкес бұрыштық жылдамдықпен периодты есептеуге болады:

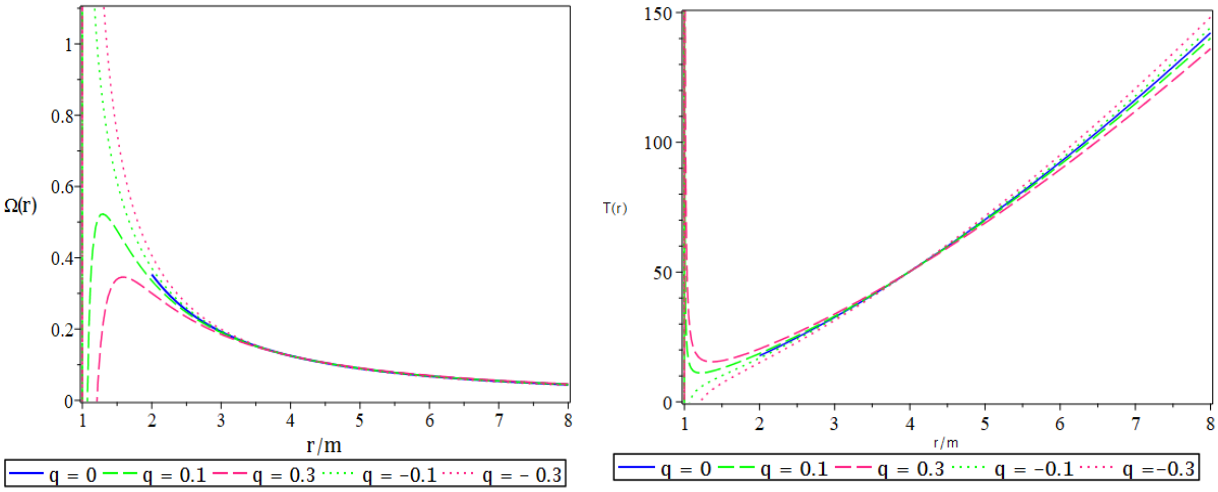
$$\Omega(r) = \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{t}} = \sqrt{\frac{m}{r^3}\left[1 + \frac{q(r-4m)}{4(r-m)}\right]}, \tag{2.46}$$

$$T(r) = \int \frac{\dot{\varphi}}{\dot{t}} d\varphi = 2\pi \frac{dt}{d\varphi} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{m}\left[1 - \frac{q(r-4m)}{4(r-m)}\right]}, \tag{2.47}$$

Бұл өрнектер негізінде бұрыштық жылдамдық пен периодтың әрекеті 2.9-суретте бейнеленген. Сондай-ақ, бұл өрнектерден классикалық жағдайда Кепелер орбиталарын аламыз.

Дөңгелек қозғалыстың орбиталар радиусы $r \approx 3m$ мәніне жақындаған сайын квадрупольдық параметрдің бұрыштық жылдамдықтың мәніне әсері арта түсетінін көреміз. Бұл сәйкесінше 2.7 және 2.8-суреттерде көрсетілген тұрақтылық шартына және энергия мен бұрыштық импульстің оң болу шарттарына сәйкес келеді. Берілген орбитаның радиусы үшін квадрупольдің оң (теріс) мәндері үшін бұрыштық жылдамдық артады (кемітеді). $r = m$

сингулярлық жанында бұрыштық жылдамдық q және r шамаларына тәуелді функция түрінде анықталатын аймақ бар екеніне назар аударуға болады. Бұл аймақ 2.6-суретте көрсетілген тұрақтылық аймағына сәйкес келеді.



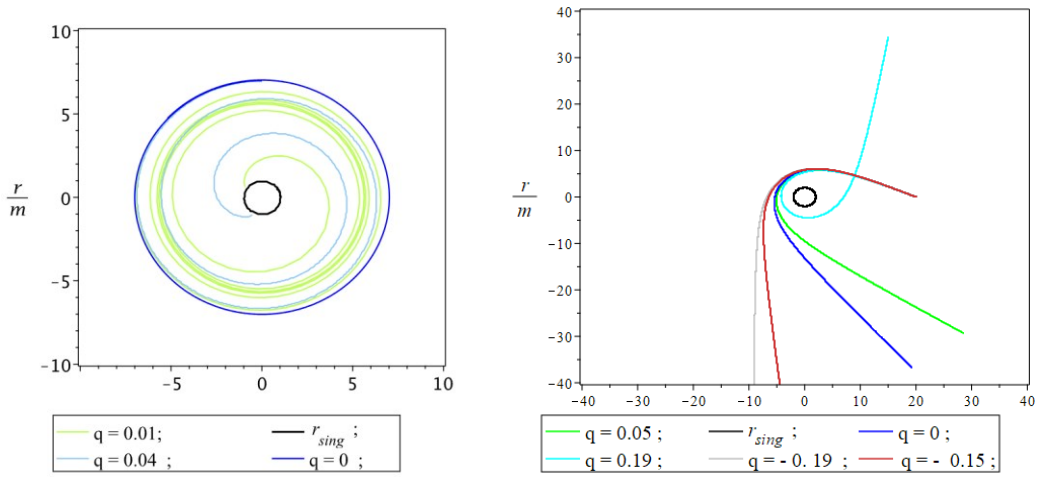
Сурет 2.9 –. Радиусы r / m және q квадруполь параметрі бойынша дөңгелек орбиталардың бұрыштық жылдамдығы (сол жақта) мен периоды (оң жақта)

Тұйықталған және Тұйықталмаған орбиталар

Экваторлық жазықтықта қозғалатын массивтік сынақ бөлшектерінің траекторияларына квадрупольдің әсерін зерттейік. Квадрупольдық параметрдің әртүрлі мәндеріне арналған геодезия 2.9 және 2.10-суреттерде көрсетілген, мұнда радиалды координат *r/м* қатынасы түрінде өлшемсіз шама болады.

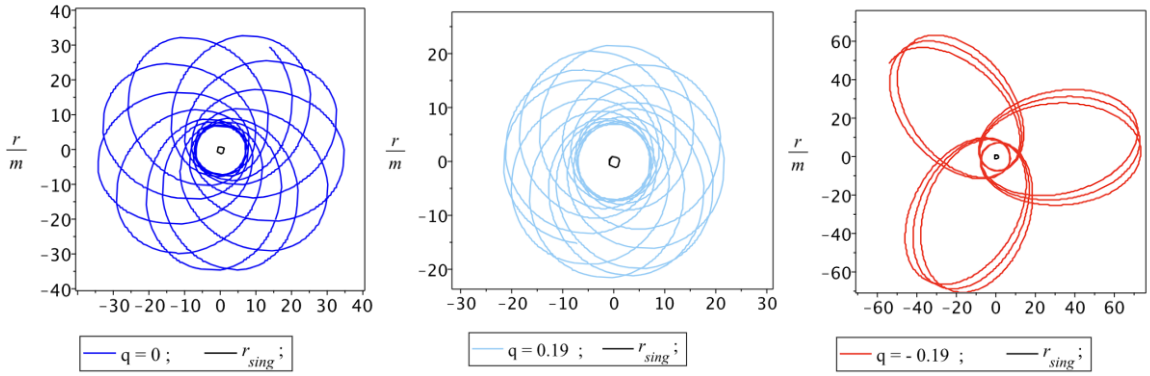
Алдымен, Шварцшильдтің тұйықталмаған траекторияларын қарастырамыз. Бұл жағдайда, квадрупольдық момент және массивті бөлшектердің бастапқы радиалды жылдамдықтары нөлге тең емес. Бастапқы бұрыштық және радиалды жылдамдықтардың алғашқы мәндеріне байланысты, барлық бөлшектер мардымсыз деформацияланған орталық дененің гравитациялық өрісінен шығып кететінін көреміз. Бұл 2.10-суретте көрсетілген. Бөлшектің шексіздікке баратын бағыты квадрупольдің шамасына байланысты. Айта кету керек, бұл әсер, негізінен, орталық дененің массалық таралуының квадрупольдық параметрін өлшеу үшін пайдаланылуы мүмкін.

2.11-суретте бастапқы радиалды жылдамдығы нөлге тең және нөлдік емес бастапқы бұрыштық жылдамдығы бірдей Шварцшильдтің тұйықталған орбиталарын қарастырдық. Салыстыруды айқын көру үшін, сол жақ астыңғы панельде Шварцшильд жағдайындағы бірдей алғашқы шарттар негізінде алынған сынақ бөлшектің геодезиялық қозғалыстың траекториясы көрсетіледі.



Сурет 2.10 – Квадрупольдық параметрдің тұйықталмаған орбиталарға әсері. Бастапқы шарттар: $\phi(0) = \pi/2$, $r(0) = 7$, $\dot{\phi}(0) = 0.07145$, $\dot{r}(0) = 0$ (сол); $\phi(0) = 0$, $r(0) = 20$, $\dot{\phi}(0) = 0.04305$, $\dot{r}(0) = -0.6$ (оң);

Жоғарғы оң жақ және сол жақ панельдерде сәйкесінше оң және теріс квадрупольдің әсерін көрсетеді. Квадрупольдық параметрдің кіші мәндері геодезияның траекториялардың тұйықтаулы сипатына әсер етпейді, ол траекториялардың морфологиясын түбегейлі өзгертеді деген қорытындыға келеміз.



Сурет 2.11 – Әр түрлі квадрупольдық параметрлердің тұйықталған орбиталарға әсері. Бастапқы шарттар барлық үш жағдай үшін бірдей:
$r(0) = 7, \varphi(0) = 0, r'(0) = 0, \varphi'(0) = 0.08$, $r_{\text{sing}} = m = 1$

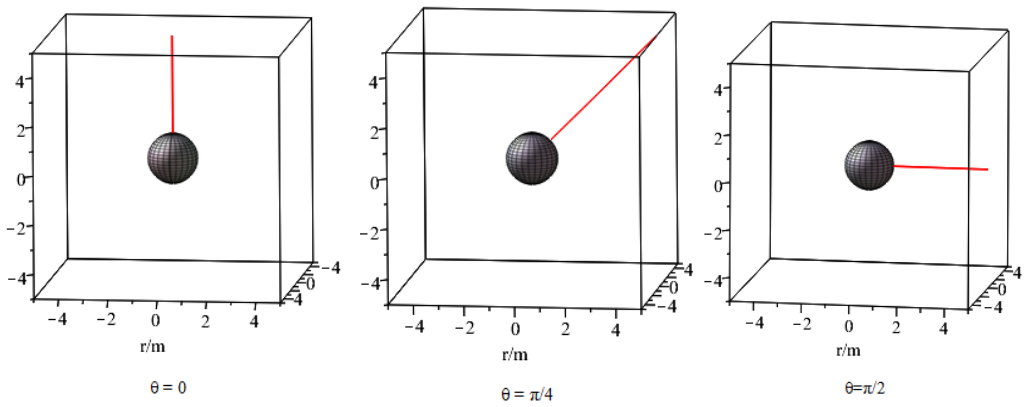
Қорыта айтқанда, квадрупольдің әрқашан Шварцшильд жағдайындағы траекторияларға әсері елеулі болады деген қорытындыға келеміз. Айқын өзгертулер бастапқы Шварцшильд траекториясының қасиеттеріне және квадрупольдық параметрдің мәніне тікелей байланысты.

Радиалды геодезия және репульсивті гравитация

Геодезиялық қозғалыстардың ішінде сынақ бөлшектерінің орталық денеге еркін құлауы қызықты мәліметтерді береді. Осы мақсатта геодезиялық

теңдеулерді (22.32) – (2.35) теңдеулерде көрсетілгендей жалпы түрде қарастырамыз. Маңызды жайт, еркін құлау жағдайында, қарастырылатын барлық жағдайларда бастапқы кеңістіктік жылдамдықтар нөлге тең деп есептеледі. Бастапқы нүктені еркін түрде таңдауға болады, алайда θ бұрышының кейбір мәндерін пайдалану қарастырып отырған мәселені терек түсінуге септігін тигізеді. Атап айтқанда, симметрия осі бастапқы мәндері $\theta = 0$, экваторлық жазықтық $\theta = \pi / 2$ және $\theta = \pi / 4$ ретінде таңдалып алдық. Назар аударатын қызықты жағдай, алдыңғы тарауда қарастырылған дәл квадрупольдық метрика (1.33 өрнек) жағдайында, радиалды геодезияның әрекеті репульсивті гравитацияның бар екендігі 1.7-суретте көрсетілген. Еркін түсетін бөлшек, егер оған күш әсер етіп, бастапқы радиалды бағытты өзгертпесе, радиалды бағыт бойынша қозғалысын жалғастырады. Бұл құбылыс квадруполь моменті бар нақты шешім жағдайында [74] қарастырылған.

Енді сол жағдайды жуықталған шешім үшін қарастырамыз және талдаймыз. (2.32)–(2.35) геодезиялық теңдеулерді интегралдау нәтижесі 2.11– суретте көрсетілген.



Сурет 2.12 – Бастапқы жылдамдықсыз сынақ бөлшектерінің еркін құлауы. Бұнда $\theta = 0$ (сол), $\theta = \pi / 4$ (орта) және $\theta = \pi / 2$ (оң). Ортадағы шар $r = m$ сингулярлықты білдіреді

Еркін түсетін сынақ бөлшектерінің траекториялары q параметрінің мәніне тәуелді емес. Нақтылық үшін зерттелетін бөлшектің энергиясын $E = 1$ етіп таңдап алынды.

Іс жүзінде еркін құлаған бөлшектер q квадруполь параметрінің мәніне тәуелсіз бастапқы таңдап алған бағыттар бойынша ($\theta = 0, \theta = \pi / 4,$ және $\theta = \pi / 2$) қозғалысын жалғастырғанын көреміз. Бұл жуықталған q метрика жағдайында (2.23 теңдеу) репульсивті гравитация әсерлерін анықтау мүмкін емес дегенді білдіреді. Сондай-ақ, алдыңғы тарауда көрсетілгендей, (1.7-сурет) радиалды геодезиялық қозғалыстың нәтижелерін ескере отырып [83-85], біз репульсивті әсерлер сызықты емес, яғни олар дәл квадрупольді метрика жағдайында ғана пайда болады деген қорытындыға келеміз.

3 ӨСЬТІК СИММЕТРИЯЛЫ, КВАДРУПОЛЬДЫҚ ЖАЛАҢАШ СИНГУЛЯРЛЫҚТЫҢ КӨЛЕҢКЕСІ

ЖСТ-ның ең алғашқы эксперименталды болжамының расталуы 1919 жылдығы күн тұтылуы кезінде жарықтың ауытқуын бақылау болды. Содан бері гравитациялық өрістегі жарықтың ауытқуынан туындайтын әр түрлі эффектілерді зерттеуде айтарлықтай прогреске қол жеткізілді. Бұндай зерттеулердің көпшілігін «гравитациялық линзалану» құбылысына жинақтауға болады[86–93]. Көпшілік жағдайдағы бақылаулар Гравитациялық өріс әлсіз және ауытқу бұрыштары аз жағдайларда Гравитациялық линзалану зерттеледі. Теориялық зерттеулер 1915 жылы Альберт Эйнштейннің жарықтың ауытқу бұрышын есептейтін сызықты формуласына негізделген. Соңғы жылдары бақылау құралдарының көмегімен күшті гравитациялық ауытқуды бақылауға мүмкіндіктер туды.

3.1 Астрофизикадағы көлеңке ұғымы

Ең алғашқы жарықтың ауытқуын бақылаудан тура бір ғасыр өткенде, 2019 жылы Оқиға көкжиегі телескопы (ОКТ) (Event Horizon Telescope, (EHT) Collaboration) [94–99] қара құрдымның суретін жариялады. Егер жарық қара құрдым маңынан жақыннан өтсе, сәулелер өте қатты ауытқып, тіпті дөңгелек орбиталармен қозғалуы мүмкін. Бұл күшті ауытқу, қара құрдымнан ешқандай жарық шықпайтындығымен бірге, қара құрдым бақылаушыға қараңғы диск ретінде көрінетін әсерге ие. Сондай ақ, бұл диск қара құрдым көлеңкесі ретінде белгілі. Негізінде, бұндай көлеңке байқалуы мүмкін деген болжамды 2000 жылы Фалькe және т.б. [100], сонымен қатар Мелия мен Фальке [101] жасаған . Сандық модельдеулерге сүйене отырып, олар өте ұзын базалық интерферометриямен 1 мм-ге жуық толқын ұзындығындағы бақылаулар сәтті болуы мүмкін деген қорытындыға келеді. Бұл мақала Галактиканың орталығындағы аса массивті қара құрдым Стрелец A^* радиокөзіне байланысты айтылды. Бұл көлеңкенің болжамды өлшемі шамамен 30 мкс, бұл радиоинтерферометрлердің ғаламдық желісінің өлшеу мүмкіндігіне сай келетіні көрсетілген. (Біздің Галактиканың орталығындағы қара құрдым массасы мен қашықтығы үшін қол жетімді ең жақсы деректерге сүйене отырып, оның көлеңкесінің бұрыштық диаметрі қазір шамамен 54 мкс деп есептеледі.) Бақылауларды мүмкін етудің технологиялық жағында да, оларды бағалаудың есептеу жағында да тамаша жетістіктерден кейін EHT ынтымақтастығы біздің Галактиканың орталығындағы қара құрдымғана емес, көлеңкені көрсететін суретті жасай алатын басқада объектілер болуы мүмкін екенін болжайды. Екі қара құрдымның кескіндері екі түрлі галактика түріне және екі мүлдем басқа қара құрдым массасына жататынына қарамастан ұқсас кескіндерді берді. Бұл нәтижелер қара құрдымдар үшін гравитация теориялары мен сәйкес шешімдерді тексеруге мүмкіндік береді. Сондықтан

астрофизикалық қара құрдым үміткерінің маңайындағы геометрияның табиғатын түсіну және қара құрдым гипотезаларының дұрыстығын тексеру үшін бақылау нәтижелерін қанағаттандыратын кез келген теорияны немесе есептеуді қарастыру маңызды.

Негізінен бұл жерде айтылып отырған «көлеңке» ұғымына және оның пайда болуына қатысты тарихта қолданылған көптеген сөздер бар. Осыған дейінгі зерттеушілер әр түрлі әдебиеттерде және әр түрлі себептермен бұндағы «көлеңке» ұғымын басқа да атаулармен байланысты зерттеп келген. Мысалға айтсақ: Синге (Synge) [102] триггер конусы деген ұғыммен байланысты зерттеген;

Зельдович пен Новиков [103] өз еңбектерінде сәулеленудің гравитациялық тартылу конусы деп қарастырған. Бардин [104], Чандрасехар [105] қара құрдымның көрінетін пішіні деп қарастырған. Оптикалық қима деп Янг [106] зерттеген. Оптикалық суреті деп Luminette [107, 108] зерттеген. Фотондарды гравитациялық қармаудың көлденең қимасы ретінде Дымников[109] зерттеген. Қара құрдымның көлеңкесі деген атпен Фальке, Мелия және Агол[100] зерттеген. Фотон сақинасымен байланысты Йохансен мен Псалтис [110], Джонсон және т.б. [111] зерттесе, Фотонды қармау сферасының көрінетін бейнесімен байланысты Бэмби[112] зерттеген. Сондай-ақ критикалық қисық ұғымымен байланысты Gralla, Holtz және Wald [113] зерттеген.

Жоғарыдағы әртүрлі атаулардың әртүрлі физикалық тұжырымдамалармен байланысты екеніне қарамастан, бұл ұғымдардың барлығы бір-бірімен тығыз байланысты. Бұл айтылған атаулар осы бағыттағы белгілі болған зерттеулердің бір бөлігі, бұдан да басқа атаулармен және физикалық тұжырымдамалармен байланысты көптеген зерттеулер болуы мүмкін. Алайда басым көп жұмыстардың математикалық негіздемелері ұқсас болғандықтан, оларды топтастырып атауға тура келеді.

Қазіргі уақытта «көлеңке» атауы кең астрофизикалық құбылыстың кең таралған атауы болып қалыптасты. Көлеңке - сөзінің негізі күнделікті өмірде қолданыстағы мағынасы барлық тілдерде бірдей болып келеді. Жарық сәулелерінің көзі мен сол беттің арасында орналасқан кедергі арқылы экранда (немесе жерде) пайда болатын қараңғы аймақ. Мысалы, шуақты күнде адам денесінің немесе жердегі ғимараттың көлеңкесі. Көлеңке - сөзінің осы беретін негізгі мағынасын сақтай отырып, Астрофизикалық Қара құрдым және т.б., объектілер жағдайында да қолданылып келеді. Осылайша, астрофизикалық объектілердің көлеңкесі ол күшті гравитациялық өрістің маңынан өткен жарық сәулелерінің осы өрісте ұсталып, бақылаушыға жетпей, бақылау фонында пайда болатын қараңғы дақтарды айтамыз.

Қара құрдымдар айналасындағы күшті гравитациялық өрістің әсерінен, яғни қисайған кеңістік-уақыттың маңынан өткен жарық сәулелерінің жүретін жолын

иіп, қара құрдымның аспандағы бақыланатын орнына әсер етеді. Жарықтың бұл иілуі қара құрдымның «көлеңкесі» деп аталатын эффектіні жасайды. Айналмайтын (немесе Шварцшильд) қара құрдымы болған жағдайда, көлеңке пішіні дөңгелек болады және ол Эвклид геометриясының негізінде күтілетін өлшемінен үлкенірек болып көрінеді. Бұл әсер қара құрдымның күшті гравитациялық өрісінен туындайды, ол жарықты қасынан өткенде жүретін жолын иілуге мәжбүр етеді. Айналмалы қара құрдым (Керр қара дыры) үшін көлеңке қара құрдымның айналуының қосымша әсерінен күрделірек болуы мүмкін.

Оның үстіне көлеңкенің өлшемі мен пішіні, бақылаушының қара құрдымға қатысты орнына да байланысты. Гравитациялық линзалану құбылысы қара құрдымның көлеңкесі байқалатын бұрышқа байланысты ауытқуларды тудырады.

Қара құрдым көлеңкесі – фотон сферасымен шектелген кеңістіктегі қараңғы аймақ [114, 115], радиусы гравитациялық өріс көзі болатын объектімен байланысты концентрлі геометриялық сфера. Қара құрдымға қарай бағытталған жарық сәулелері фотон сферасының бетіне жақын жерге дейін бұрылады, ең жақын болғанда жанама ретінде өтеді [116]. Басқаша айтқанда, жарық қара құрдымға қарай иіліп, қара құрдым оқиғасының көкжиегі үстінде сфералық бетті қалыптастыруды жалғастырады, осылайша қара құрдымды көлеңке қалыптасады.

Әдебиеттерде, теориялық есептеулер көрсеткендей, қара құрдымның көлеңкесі негізінен оның фотон сферасына байланысты анықталады. Сонымен қатар, қара құрдымның көлеңкесін фотон сферасының бұрыштық диаметрі (немесе бұрыштық радиусы) арқылы да анықтауға болатыны белгілі.

Сонымен, көлеңкенің қалыптасуы үшін, компактті объектілерге бағытталған жарық сәулелерінің гравитациялық өрістерде ұсталып, бақылаушыға жетпей қалған бөлігінің фондағы қара дақ болып көрінуімен байланысты екен. Бұл тұрғыдан, кез-келген массивті объектінің жақын маңынан өткен жарық фотондарының қандай да бір бөлігі күшті гравитациялық өрісте ұсталып қалып, бақылаушыға жетпейтін бөлігі көлеңкені береді. Сондықтан, көлеңкені қалыптастыратын объектілерге байланысты, әр түрлі болуы мүмкін. Мысалы: қара құрдым көлеңкесі, нейтронды жұлдыздар көлеңкесі, бозон жұлдыздар көлеңкесі, жалаңаш сингулярлықтар көлеңкесі т.б. Көлеңкелер массалар және айналу спиндері бойынша әр түрлі пішіндерге ие болуы мүмкін., алайда олардың орталық дене туралы күшті гравитациялық және кванттық гравитациялық әсерге байланысты маңызды информацияларды береді.

Бұл тарауда, жалаңаш сингулярлықтардың көлеңкелері туралы тоқталамыз. Жалаңаш сингулярлықтар қара құрдымдарға қарағанда құрылымы оқиға көкжиегінің жоқтығымен ерекшеленеді, сондықтан олардың көлеңкелері де

өзгешелікке ие болуы мүмкін. Сондықтан, көлеңкеге байланысты жалаңаш сингулярлықтардың күшті гравитациялық өрістері зерттеледі.

3.2 Сфералық симметриялы қара құрдымдар мен жалаңаш сингулярлықтың көлеңкесі

Теориялық тұрғыдан, астрофизикалық объектілердің көлеңкелері олардың айналасындағы фотондардың қозғалысымен байланысты зерттеледі. Әдетте қара құрдымдар жағдайында, көлеңке қара құрдымның оқиға горизонтынан тыс фотон сферасының болуына байланысты қалыптасады деп саналады.

Сфералық симметриялы және статикалық кеңістік-уақыттағы көлеңкені салу немесе есептеу жолы жалпы жағдайда төмендегідей екі кезеңнен тұрады[117]:

1. Ең алдымен, бақылаушыдан бастап кері бағыттағы жарық сәулесінің көлбеу бұрышының жалпы өрнегі жазылады. Бұл өрнек қозғалыстың қандай да бір тұрақтыларын қамтиды, сондықтан жалпы өрнек болып табылады. Бастапқыда тұрақтылардың нақты мәні көрсетілмейді, сондықтан ол барлық жарық сәулелеріне қатысты болады. Әдетте, жарық сәулесінің ең жуық жақындау нүктесінен орталық дене орталығына дейінгі радиус қозғалыстың тұрақтысы ретінде пайдаланылады.

2. Жарықтың ең кіші тұрақсыз дөңгелек орбиталарына асимптотикалық түрде жақындайтын жарықтың қозғалысы қарастырылады, осы қозғалыстағы тұрақтылардың мәні сәйкес бұрыштық мәндерге ауыстырылады. Бұл қадам көлеңкенің құрылымы тұрақсыз дөңгелек орбиталардың жанындағы жарық сәулелерінің қозғалысының қасиеттерімен дәл сипатталуын қамтамасыз етеді.

Фотон сферасының болуына байланысты, егер Кеңістікте бір ғана фотон сферасы болса, және ол тек тұрақсыз дөңгелек жарық орбиталары болса, көлеңкенің құрылымы салыстырмалы түрде қарапайым болады. Бұндай сценарийде тұрақсыз дөңгелек орбиталарға жақындаған жарық сәулелерін анықтау, және сәйкес қозғалыс тұрақтыларының көмегімен көлбеу бұрышын анықтау процесі қарапайым болады. Дегенмен, бірнеше фотон сфералар болса немесе фотон сферасы жарықтың тұрақты және тұрақсыз дөңгелек орбиталарының жиыны болса, көлеңкенің құрылымы күрделірек және оның түсініксіз болуы мүмкін. Бұл жағдайларда көлеңкені дәл модельдеу үшін жарық көздерінің орнын көрсету сияқты қосымша шарттарды қарастыру қажет.

Жоғарыдағы көлеңкелерді сызу немесе олардың пішінін алу туралы екі қадам фотон сферасы жоқ жағдайды қарастыра алмайды.

Төменде, сфералық симметриялы статикалық кеңістік-уақыт метрикалары үшін көлеңкелерді аналитикалық есептеудің жолын қарастырамыз[118]. Ескерте кететін жайт, бұл есептеулер тек қара құрдымдар үшін емес жалаңаш

сингулярлықтар үшін де орынды. Соңында, егер фотон сферасы жоқ болса, жалаңаш сингулярлықтар үшін де көлеңкені есептеулің мүмкіндігін көрсетеміз.

Жалпы жағдайда, сфералық симметриялы және статикалық кеңістік-уақыт метрикаларын мына түрде жазу ыңғайлы:

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + D(r)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \tag{3.1}$$

мұндағы $A(r)\ A(r)\ B(r)$және $D(r)$ метрикалық функциялар болып табылады.

Лагранж функциясы:

$$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}, \tag{3.2}$$

жоғарыдағы сфералық симметриялы интервал үшін төмендегі өрнекті жазамыз:

$$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\left[-A(r)\dot{t}^2 + B(r)\dot{r}^2 + D(r)\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)\right]. \tag{3.3}$$

Егер сфералық симметрияны ескерсек, онда жоғарыдағы өрнекті экваторлық жазықтықта қарастыру жеткілікті және ыңғайлы, яғни: $\theta = \pi/2$, $\sin\theta = 1.$

Эйлер-Лагранж теңдеуі:

$$\frac{d}{d\chi}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} \tag{3.4}$$

t,φ координаталары бойынша кеңістік-уақыттың симметриясын ескеріп, екі қозғалыс тұрақтыларын метрикалық функциялармен байланысты былай жазуға болады:

$$E = -A(r)c^2\dot{t}\,, L = D(r)\dot{\varphi}\,. \tag{3.5}$$

Фотон үшін нөлдік геодезия теңдеуі жазылады, $g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = 0$, сәйкесінше жоғарыдағы сызықтық элемент мынадай болады:

$$-A(r)c^2\dot{t}^2 + B(r)\dot{r}^2 + D(r)\dot{\varphi}^2 = 0\ . \tag{3.6}$$

Қозғалыстың интегралдау тұрақтылары үшін жазылған (3.2) өрнектен

$$\frac{\dot{r}^2}{\dot{\varphi}^2} = \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2, \tag{3.7}$$

Қатынасын өрнектеуге болады. Бұл өрнек жарық тәрізді геодезия үшін орбиталық теңдеуді береді. Сонымен, жоғарыдағы (3.6) және (3.7) өрнектерді пайдаланып, орбитаның теңдеуін мына жалпы түрде жазуға болады:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{D(r)}{B(r)} \left(\frac{D(r)}{A(r)} \frac{E^2}{L^2} - 1 \right). \tag{3.8}$$

Жоғарыдағы (3.8) өрнек классикалық механикада бір өлшемді жағдайдағы энергияның сақталу заңына ұқсайды, мұндағы φ уақыт бойынша айнымалының рөлін атқарады:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + V_{eff}\left(r\right) = 0\,. \tag{3.9}$$

Сонымен бірге, теңдеудегі тұрақтыларды бір ғана тұрақтымен қайта жазуға болады, $L/E = b$ бұл бұрыннан белгілі импакт параметрін береді. Импакт параметрі анықталса, онда қозғалысты $V_{eff}\left(r\right)$ потенциалындағы радиалды қозғалыс деп елестете аламыз. Жоғарыда айтылған көлеңкелерді есептеудегі екі шарт бойынша, жарық сәулелері үшін дөңгелек орбиталарды есептеуге тура келеді. Ол үшін, осы эффективті потенциалды *r* және *b* параметрлері үшін $V_{eff}\left(r\right) = 0$, $V_{eff,r}\left(r\right) = 0$ теңдеулерін қарастыру керек. Бұл өрнектер жарық сәулелерінің орталық денеге ең жақын орналасқан дөңгелек орбиталарын анықтайды, осы орбиталар үшін радиусты *R* деп белгілесек, онда жарық шоғы орталық денеге жақындап, *R* минимум радиусына жеткеннен кейін қайтадан ұсталып қалмай шығып кететін жағдайларда орбиталық теңдеуді (3.8) *b* орнына *R* пайдаланып қайта жазу ыңғайлы. Бұндағы *R* траекторияның бұрылу нүктесіне сәйкес келеді, сондықтан $dr/d\varphi|_R = 0$ шарты орындалады. Соңында (3.8) теңдеудің көмегімен *R* мен қозғалыс тұрақтысы *E/L* арасындағы байланысты аламыз:

$$\frac{E^2}{L^2} = \frac{A(R)}{D(R)}, \text{ немесе } \frac{1}{b^2} = \frac{A(R)}{D(R)}, \tag{3.10}$$

сонымен қатар, мынадай белгіленген функцияны енгіземіз

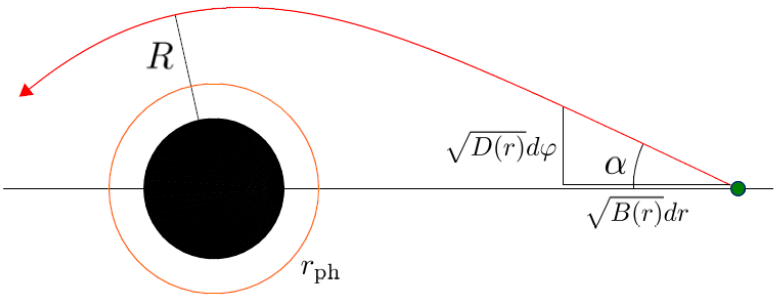
$$h(r)^2 = \frac{D(r)}{A(r)} \tag{3.11}$$

Жоғарыдағы қосымша енгізілген функциясының көптеген артықшылықтары бар. Мысалы, Шварцшильд кеңістік-уақытында *h(r)* функциясы Шварцшильд гравитациясындағы фотондардың қозғалысы үшін эффективті потенциалға эквивалентті болады. Сондай-ақ, импакт параметрі мен $h(r)$ функциясы арасындағы байланыс мына қатынас арқылы анықталатынын көреміз

$$b = h(R) \tag{3.12}$$

Жоғарыдағы (3.10) (3.11) және (3.12) өрнектерді пайдаланып, (3.8) орбитаның өрнегін мына түрде қайта жазамыз:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{D(r)}{B(r)}\left(\frac{h(r)^2}{h(R)} - 1\right). \tag{3.13}$$



Сурет 3.1 –: Бақылаушы орнынан (оң жақтағы кіші жасыл диск) кері бағытта α бұрышымен шыққан жарық сәулесі. Қара құрдым көкжиегі мен фотон сферасы көрсетілген (қара түсті диск, қызыл түсті шеңбер); r_{ph} – фотон сферасының радиусы. Траектория Шварцшильд кеңістік уақытында есептелді, *R* ең жақын жақындау нүктесіндегі ара қашықтыққа сәйкес келетін радиусты білдіреді.

Көлеңкені алу үшін, r_0 қашықтықта орналасқан статикалық бақылаушы орталық денеге қарай жарық сәулелерін жібереді деп есептейік. 3.1-суреттен көрініп тұрғандай, мұндай жарық сәулесі мен радиалды бағыт арасындағы α бұрышы былай анықталады:

$$\cot\alpha = \frac{\sqrt{g_{rr}}dr}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}d\varphi}\bigg|_{r=r_o} = \frac{\sqrt{B(r)}dr}{\sqrt{D(r)}d\varphi}\bigg|_{r=r_o}, \tag{3.14}$$

(3.13) теңдеудің көмегімен біз мынаны аламыз

$$\cot^2\alpha = \frac{h(r_o)^2}{h(R)^2} - 1. \tag{3.15}$$

Жоғарыдағы өрнекті қарапайым тригонометриялық түрлендірулер арқылы мына түрге келтіреміз:

$$\sin^2\alpha = \frac{h(R)^2}{h(r_o)^2}\ . \tag{3.16}$$

Егер, ең жақын дөңгелек орбита фотон сферасымен анықталса, онда R қисықтық радиусы тұрақсыз r_{ph} дөңгелек орбиталардың біріне асимптотикалық түрде жақындайды. Сондықтан көлеңкенің α_{ph} бұрыштың радиусын алу үшін (3.16) теңдеуде $R \to r_{ph}$ кездегі шектік жағдайды қарастыру керек:

$$\sin^2\alpha_{sh} = \frac{h(r_{ph})^2}{h(r_o)^2} \tag{3.17}$$

формуладағы $h(r)$ (3.11) өрнек бойынша анықталады. Импакт параметрінің b_{cr} критикалық мәні r_{ph} -ге байланысты төмендегідей анықталады:

$$b_{cr} = h(r_{ph}), \tag{3.18}$$

Сондықтан, (3.17) теңдеуді критикалық импакт параметрмен мына түрінде де жазуға болады

$$\sin^2\alpha_{sh} = \frac{{b_{cr}}^2}{h(r_o)^2}, \tag{3.19}$$

Немесе

$$\sin^2 \alpha_{sh} = \frac{b_{cr}{}^2 A(r_o)}{D(r_o)}. \qquad (3.20)$$

Сонымен, жоғарыдағы өрнектерде қажетті бір шама, яғни берілген метрика үшін фотон сферасының r_{ph} радиусын анықтау керек болады. Жарық сәулесі үшін дөңгелек орбита бойынша екі шарт бір уақытта орындалуы керек: $dr/d\varphi = 0$ және $d^2r/d\varphi^2 = 0$. Екінші шартын (3.13) теңдеуді дифференциалдау арқылы алуға болады. Екі теңдеуді бірге шешіп, фотондар үшін дөңгелек орбитасының радиусының теңдеуін аламыз. Осы шарттар мына теңдеудің шешімін табу мәселесіне келіп тіреледі:

$$0 = \frac{d}{dr} h(r)^2, \qquad (3.21)$$

бұл теңдеу r радиусының бірнеше мәндері үшін қанағаттандырылуы мүмкін, сондықтан бірнеше фотон сфералары болуы да мүмкін. Егер бұл орындалса, онда жарық сәулелері спираль бойынша қозғалатын тұрақсыз фотон сфераларынан тұрады. Бұдан шығатын қортынды: көлеңкенің құрылысын әрбір сфералық объектілердің нақты жағдайы үшін бөлек талқылау керек және нәтиже жарық көздерінің нақты қай жерде орналасқанына байланысты болады.

Алыстағы бақылаушы үшін, шешімнің асимптоталық жазық болатын аумақтарын қарастыруға тура келеді. Қарапайым мысалы үшін, яғни $r \to \infty$ кезінде $A(r) \to 1, B(r) \to 1$ және $D(r)/r^2 \to 1$ болатын сфералық симметриялы және статикалық метриканы, жоғарыда көрсетілген жалпы түрдегі сызықтық элемент (3.1)-ге қойып қарастырайық. Сонда алыс қашықтықта орналасқан бақылаушы үшін көлеңкенің бұрыштық өлшемі (3.19) өрнектің жуықталған түрімен былай жазылады:

$$\alpha_{sh} = \frac{h(r_{ph})}{r_o}, \alpha_{sh} = \frac{b_{cr}}{r_o}. \qquad (3.22)$$

Сондықтан асимптотикалық жазық, сфералық симметриялы және статикалық кеңістік-уақытта алыс қашықтықта бақыланатын көлеңкені есептеу үшін (3.21) өрнектен табылған r_{ph} мәнін (3.11) теңдеуге қойып $h(r)$ функциясын анықтау жеткілікті. Егер, $D(r) = r^2$ деп алсақ және $\omega(r) = \sqrt{A(r)} = \sqrt{-g_{tt}(r)}$ функциясын енгізсек, онда (3.21) теңдеуді мынадай түрге келеді:

$$rw'(r) = w(r)\,. \tag{3.23}$$

Кейбір әдебиеттерде, (3.18) теңдеудегі b_{cr} шамасы жай ғана «қара құрдым көлеңкесінің радиусы» деп айтылады. Жоғарыда (3.23) өрнекке байланысты бұл шаманы былай да жазуға болады:

$$r_{sh} \equiv b_{cr} = \frac{r_{ph}}{w(r_{ph})}\,. \tag{3.24}$$

Сонымен, жоғарыдағы алынған теңдеулерді Шварцшильд Қара құрдымының көлеңкесін есептеу үшін қарастырайық. Бұл жағдайда, (3.1) өрнектегі сызықтық элементтің метрикалық функциялары:

$$A(r) = B(r)^{-1} = 1 - \frac{2m}{r}, D(r) = r^2\,, \tag{3.25}$$

Сонымен бірге, $h(r)$ функциясы және r_{ph} фотон сферасының радиусы мына түрде анықталады:

$$h(r)^2 = \frac{r^2}{1 - 2m / r_o}, \; r_{ph} = 3m, \; b_{cr} = 3\sqrt{3}m\,. \tag{3.26}$$

Осы шамаларды (3.17) орнына қойсақ, есептеулер нәтижесі Шварцшильд қара құрдымының көлеңкесі үшін жазылған Синдж формуласымен бірдей болады.

$$\sin^2 \alpha_{Sch} = \frac{27m^2}{{r_0}^2}\left(1 - \frac{2m}{r_0}\right). \tag{3.27}$$

Бұл нәтижелер Зельдович пен Новиковтың зерттеулерінде де қарастырылған, алайда олардың ешқайсысы «көлеңке» сөзін нақты қолданбаған.

Алыс қашықтықтағы бақылаушы үшін көлеңкелердің бұрыштық өлшемі:

$$a_{sh} = \frac{3\sqrt{3}m}{r_o}, r_o \gg m\,. \tag{3.28}$$

Қайталап айтсақ, r_{sh} шамасының ұзындыққа сәйкес өлшемі бар, сондықтан оны бақылаушы іс жүзінде өлшейтін көлеңкесінің өлшемсіз бұрыштық радиусы α_{sh} шамасынан өзгеше.

Сонымен, қорыта келе, жоғарыдағы (3.19)-(3.24) өрнектерінің көмегімен сфералық симметриялы массивті денелердің айналасында пайда болатын астрофизикалық көлеңкелердің бұрыштық өлшемін аналитикалық түрде табуға болады. Көлеңкелердің өлшемі бақылаушының орнына және орналасқан қашықтығына байланысты. Сфералық симметриялы кеңістік-уақыт болғандықтан, көлеңкелердің пішіні дөңгелек түрге ие болады.

Сфералық симметриялы нөлдік жалаңаш сингулярлық

Сфералық симметриялы статикалық жалаңаш сингулярлы кеңістік-уақыттың қасиеттері [117, 119] жұмыста зерттелген. (3.1) өрнекке сай, нөлдік жалаңаш сингулярлықтағы метрикалық функция:

$$A(r)=\frac{1}{\left(1+\frac{M}{r}\right)^2}, \tag{3.29}$$

мұндағы M – жоғарыдағы кеңістік-уақытының Арновитт-Дезер-Миснер (ADM) массасы. Бұл кеңістік уақыт үшін Кречман скалярының және Риччи скалярының өрнегі:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}=\frac{4M^2}{r^4\left(M+r\right)^8}\left[\left(M-2r\right)^2r^4+4\left(M+r\right)^2r^4+\left(M+r\right)^4\left(M+2r\right)^2\right], \tag{3.30}$$

$$R=\frac{2M^3\left(M+4r\right)}{r^2\left(M+r\right)^4}. \tag{3.31}$$

Кречман скаляры мен Риччи скаляры үшін жоғарыда келтірілген өрнектерден кеңістік-уақыттың центрде $r=0$ күшті қисықтық сингулярлыққа ие екендігі анық. Бұл кеңістікте сингулярлық айналасында оқиға горизонты сияқты нөлдік беттер жоқ, сондықтан әдебиеттерде нөлдік жалаңаш сингулярлық деп аталады.

Бұл метрика анизотропты сұйықтық көзі бар Эйнштейннің өріс теңдеулерінің шешімі болып табылады.

$$T_{ab}=diag\left(\rho,p_r,p_\theta,p_\varphi\right). \tag{3.32}$$

Энергия тығыздығы мен қысым үшін өріс теңдеулерінің шешімдері:

$$\rho = -T^{t}{}_{t} = \frac{M^2(M+3r)}{r^2(M+r)^3}, \tag{3.33}$$

$$p_r = T^{r}{}_{r} = -\frac{M^2(M+3r)}{r^2(M+r)^3}, \tag{3.34}$$

$$p_\theta = p_\phi = T^{\theta}{}_{\theta} = T^{\phi}{}_{\phi} = \frac{3M^2}{r^4}\left(1+\frac{M}{r}\right)^{-4}, \tag{3.35}$$

бұл метрика барлық энергетикалық шарттарды, яғни күшті, әлсіз және нөлдік энергия шарттарын қанағаттандыратыны көрсетілген [120]; Қысымдағы анизотропия:

$$p_r - p_\theta = -\frac{M^2(M^2+4Mr+6r^2)^2}{r^2(M+r)^4}. \tag{3.36}$$

Анизотропты сұйықтықтың күй теңдеуін E_{anis} былай жазуға болады:

$$E_{anis} = \frac{p_r + p_\theta + p_\varphi}{3\rho}, \tag{3.37}$$

(3.33-3.37) теңдеулерінен осы кеңістік-уақыт үшін күй теңдеуі:

$$E_{anis} = \frac{2}{\left(3+\frac{M}{r}\right)\left(1+\frac{M}{r}\right)} - \frac{1}{3}, \tag{3.38}$$

Бұл өрнекте, егер $r \to 0$ нөлге ұмтылса, күй теңдеуінің мәні $-1/3$ болады. Егер $r \to \infty$ шексіздікке ұмтылса, күй теңдеуінің мәні $1/3$ болады.

Жоғарыдағы (3.29) метрикалық функцияны ескеріп, (3.1) өрнектегі метрикалық тензордың уақыт құраушысын қатарға жіктеп жазсақ:

$$g_{tt} \approx -\left[1-\frac{2M}{r}+3\left(\frac{M}{r}\right)^2-\ldots\right], \tag{3.39}$$

Бұдан, r дің үлкен мәндерінде бұл метрика асимптоталық жазық болатыны анық. Үлкен қашықтықта метрика Шварцшильд метрикасына ұқсағанымен, сингулярлыққа жақын жерде бұл кеңістік уақытының құрылымы Шварцшильд кеңістік уақытының құрылымынан өзгеше болады.

Нөлдік жалаңаш сингулярлықтың көлеңкесі

Біз сфералық нөлдік жалаңаш сингулярлық метрикасын қарастырамыз және бұл сфералық симметриялық жалаңаш сингулярлық кеңістіктік уақыт метрикасы фотондық сферасы жоқ анизотропты сұйықтық көзі бар Эйнштейн теңдеулерінің шешімі болып табылады. Жоғарыдағы көлеңкенің бұрыштық өлшемін есептеу формулалары негізінде, нөлдік жалаңаш сингулярлық үшін көлеңкені есептеуге болады. (3.13)-өрнекті пайдаланып, фотонның орбиталық теңдеуі жазсақ:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{r^2 A(r)}\left(\frac{r^2}{A(r)}\frac{E^2}{L^2} - 1\right). \tag{3.40}$$

(3.8) теңдеуге сәйкес эффективті потенциал мына түрге келеді:

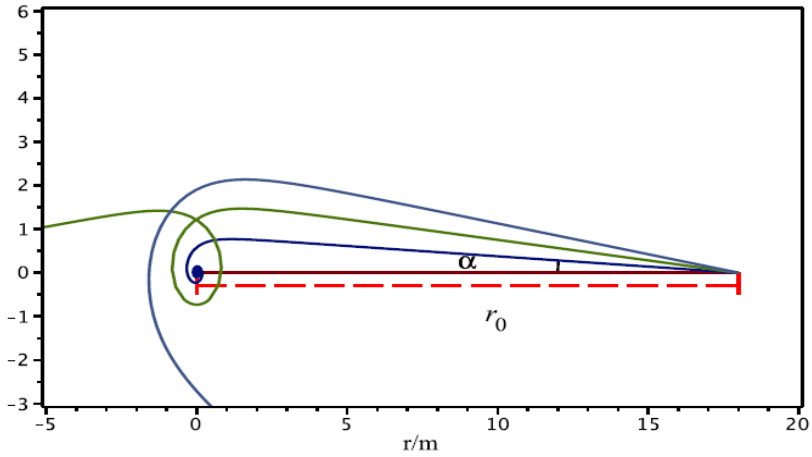
$$V_{eff} = \frac{1}{r^2}\left(1+\frac{m}{r}\right)^2 - \frac{E^2}{L^2}\left(1+\frac{m}{r}\right)^4. \tag{3.41}$$

Орнықсыз дөңгелек орбиталарың болу шарттарын пайдаланамыз, және жоғарыда келтірілген теңдеуден айналмалы орбитаның минималды радиусы бар көздеу параметрін b анықтауға болады.

$$\frac{R^2}{A(R)} = b^2, \tag{3.42}$$

$h(r)$ функциясы мынадай анықталған:

$$h(r)^2 = \frac{r^2}{A(r)}, \tag{3.43}$$



Сурет 3.2 –: Нөлдік жалаңаш сингулярлық кезіндегі көлеңкелердің түзілуі

Сонда, жарық сәулесі мен радиалды бағыт арасындағы α бұрыш:

$$\sin^2\alpha = \frac{h\,(R)^2}{h\,(r_0)^2}, \tag{3.43}$$

Немесе

$$\sin^2\alpha = \frac{(R+m)^2}{(r_0+m)^2}. \tag{3.44}$$

Жоғарыдағы (3.21) шартынан нөлдік жалаң сингулярлық кеңістік-уақыттағы фотонның бұрылыс нүктесінің (r_{tp}) минималды радиусы $r_{tp} = R = 0$ ге тең, онда бақылаушы үшін көлеңкенің бұрыштық өлшемі

$$\sin\alpha = \frac{m}{r_0+m}, \tag{3.45}$$

Ал үлкен қашықтықтағы бақылаушы үшін бұрыштық өлшем:

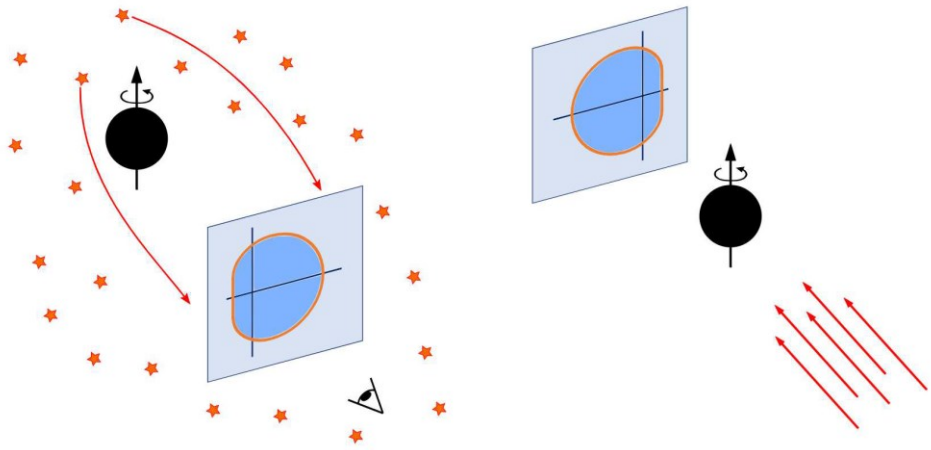
$$\alpha \approx \frac{m}{r_0}, \tag{3.46}$$

Сонымен, жоғарыдағы өрнектен байқағандай, нөлдік жалаңаш сингулярлықтың айналасындағы пайда болатын көлеңке бақылаушының орнына байланысты және бірдей массалық шамадағы қара құрдымнан пайда болатын көлеңке жиегіне қарағанда кіші болады екен. Алыс қашықтықтарда, қара құрдым

болмаса нөлдік жалаңаш сингулярлық екенін ажыратып айтуға болмайтынын байқаймыз.

Керр қара құрдымы үшін көлеңге

Бардин [104] Керр қара құрдымының көлеңкенің дөңгелек емес пішініне байланысты екі әсер ету параметрлі тәсілді ұсынды; бұрыштық көлеңке радиустары осы импакт параметрлерін бақылаушының (Бойер-Линдквист) r_0 радиус координатасына байланысты жуықтап анықталады. Дегенмен, көлеңкенің бұрыштық өлшемі мен критикалық импакт параметрі арасындағы қатынас тек шексіздікте асимптотикалық жазық болатын метрика үшін жарамды. Әрине, импакт параметрлерін асимптоталық жазық емес кеңістік-уақытта есептеуге болады, бірақ бұл параметрлер бізге көлеңкенің өлшемі мен пішіні туралы қажетті ақпаратты бере алмайды. Сфералық симметриялы қара құрдымның көлеңкесі импакт параметрлері арқылы есептеледі. Бұл параметрлер негізінен қара құрдымнан жарық сәулелері гравитациялық түрде максималды иіліп, көлеңкенің жиектерін құрайды.



Сурет 3.3 – Керр қара құрдымының айналу бағытына тәуелді көлеңке пішіндері

Әр түрлі зерттеулер нәтижелері қара құрдым көлеңкелерін анықтау кезінде қарастырып мәселені мұқият қараудың маңыздылығын көрсетеді. Көлеңкелерге қара құрдымның гравитациялық өрісінің геометриясы да, оны қоршаған жарық заты да әсер етеді. Көлеңке мен басқа белгілердің арасындағы айырмашылықты түсіну бақылау деректерін дәл түсіндіру үшін өте маңызды.

Керр шешімі осьтік симметриялы және айналмалы болғандықтан, бақылалу нәтижелерімен салыстыруға бағытталған көптеген зерттеулер жасалды. Керр қара құрдым Event Horizon Telescope (EHT) деректері негізінде жан-жақты талданғанымен, кейбір соңғы зерттеу жұмыстарында көрсетілгендей, оның

иммитаторларын (mimiker) зерттеп, олардың белгілі бір параметр диапазонында бірдей көлеңкелер жиектері болатындығын көрсетті.

Жалпы қара құрдым көлеңкелерін байқаудың әртүрлі физикалық сценарийлерін зерттейтін және оларды бір-бірімен салыстыратын басқа да көптеген жұмыстар бар [113,117, 121, 122]. Бұл зерттеулер қара құрдымдарың көлеңкелері туралы түсінігімізді жетілдіреді және әртүрлі жағдайларда олардың қасиеттерін тануға көмектеседі.

Теориялық физикада, релятивистік астрофизикада және ықшам нысандар физикасында қолданылатын көптеген аналитикалық әдістер бар. Сонымен қатар, теориялық зерттеулерді бағалау үшін және бақылау нәтижелерімен салыстыру үшін “кері сәулелер” (backward ray tracing) сияқты сандық есептеу әдістері бар. Бұл диссертациялық жұмыста көлеңкелерді зерттеу үшін аналитикалық әдістерді пайдаланамыз. Бұл әдіс көлеңкелер арқылы кеңістік-уақыттың қасиеттерін, массалық таралуды сипаттайтын квадрупольдық параметрдің үлесін терең түсінуімізге пайдалы.

3.3 Осьтік симметриялы, квадрупольдық жалаңаш сингулярдықтың көлеңкесі және мимикер эффектісі

Қара құрдым көлеңкелерін сипаттайтын аналитикалық шешімдер дербес жағдайларда, тек фотондардың геодезиялық теңдеулері айнымалыларды ажыратып жазылған жағдайында ғана қарастырылады. Оған мысал ретінде Керр қара құрдымын зерттеген кезде қосымша Картер тұрақтысын пайдаланатыны белгілі. Жалпы жағдайда, көлеңкелердің пайда болуын қарастыратын сандық әдістер көп, солардың бірі кері сәулелер ізі (backward ray tracing) әдісі.

Біз енді жоғарыда айтылған квадрупольдық жалаңаш сингулярлық кеңестік-уақыттағы көлеңкенің пайда болуын зерттейміз. Атап өткеніміздей, бұл шешім өстік симметриялы Эйнштейн вакуумдық өріс теңдеулерінің квадрупольдық дәл шешімі болып, квадрупольдық массалық таралудың сыртқы гравитациялық өрісін сипаттайды. Сонымен қатар, сәйкес кеңістік-уақыт жалаңаш сингулярлықтардың болуымен өзгешеленеді. Сфералық симметриялы кеңістік-уақытқа қарағанда, қосымша еркін параметрдің болуы, өріс теңдеулерінде математикалық құрылымы жағынан күрделіліктерге алып келді. Сондықтан, геодезиялық теңдеулерді шешу кейбір дербес жағдайларда ғана қарастыруға мүмкіндік болады. Төменде, экваторлық жазықтықтағы бақылаушы үшін көлеңкелердің бұрыштық өлшеміне квадрупольдық моменттің әсерін қарастырамыз.

q-метрика уақыт- кеңестігіндегі көлеңке

Сфералық координаттарда q− метриканы метрикалық функциялар арқылы мына жалпы түрде жазуға болады: және қарапайым түрде былай жазуға болады

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = -A(r,q)dt^2 + B(r,\theta,q)dr^2 + C(r,\theta,q)d\theta^2 + D(r,d\theta^2)d\varphi^2, \qquad (3.47)$$

Бұндағы метрикалық функциялар (1.33) өрнекте көрсетілген метриканың компоненттеріне теңі. Қозғалыс теңдеулерін алып, оларды аналитикалық жолмен шешу мүмкіндігі аз, алайда, экваторлық жазықтықта орналасқан бақылаушы үшін өрнектер біршама ықшамды түрге келеді, сондықтан, аналитикалық шешімдер алуға мүмкіндік бар. Сонымен, жоғарыдағы белгілеп алған метрикалық функцияларды экваторлық жазықтықты ескеріп, мына түрде қайта жазайық:

$$A(r,\theta) = g_{tt} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1+q},\ B(r,\theta) = g_{rr} = g_{tt}^{-1}\left(1 + \frac{m^2}{r^2 - 2mr}\right)^{-q(2+q)},$$

$$C(r,\theta) = g_{\theta\theta} = r^2 g_{rr},\ D(r,\theta) = g_{\phi\phi} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-q} r^2. \qquad (3.48)$$

Сонымен қатар, жарық сәулелері үшін төр өлшемді импульсті нормалау шарты былай жазылады

$$g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} = 0. \qquad (3.49)$$

Осыларды ескеріп, жоғарыдағы сызықтық элементті қайта жазсақ:

$$-A(r,\theta)\dot{t}^2 + B(r,\theta)\dot{r}^2 + D(r,\theta)\dot{\varphi}^2 = 0. \qquad (3.50)$$

Кеңістік-уақыттың симметриясына байланысты, қозғалыс тұрақтылары E энергиясы мен L бұрыштық импульс төмендегідей анықталады:

$$E = g_{\alpha\beta}\xi_t^{\alpha}p^{\beta} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1+q}\dot{t}\ ,L = g_{\alpha\beta}\xi_{\varphi}^{\alpha}p^{\beta} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-q}\dot{\varphi}\ , \qquad (3.51)$$

Бұндағы $\xi_t = \partial_t = \partial_t$ және $\xi_{\varphi} = \partial_{\varphi}$ Киллиг векторлары.

Жоғарыдағы қозғалыс тұрақтыларын пайдаланып, орбитаның қозғалыс теңдеулерін жазсақ[118]

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{P_r}{P_{\varphi}}\right)^2 = \frac{D(r,\theta)}{B(r,\theta)}\left(\frac{h(r,\theta)}{h(R,\theta)} - 1\right), \qquad (3.52)$$

Бұндағы $h(r,\theta)$ функциясы

$$h(r,\theta)=\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1-2q} r^2\sin^2\theta \tag{3.53}$$

Көздеу параметрі дөңгелек орбита радиусымен және q параметрінің мәніне байланысты анықталады: $b\big|_{r=R,\theta=\pi/2}=h(R)$.

3.1- суреттегідей, осы дөңгелек орбиталардың r_0 қашықтықтағы бақылаушыға байланысты бұрыштық өлшемі төмендегідей анықталады:

$$\sin^2\alpha=\frac{h(R,\pi/2)^2}{h(r_0,\pi/2)^2}\Bigg|. \tag{3.54}$$

Көлеңкенің бұрыштық өлшемі ең кіші орнықсыз дөңгелек орбитамен байланысты, радиусы $R\to r_{ph}$ тұрақсыз дөңгелек орбиталарының біріне асимптотикалық түрде жақындайтын жарық сәулелеріне сәйкес көлеңке шекарасының қисығын қарастырайық. (3.21) өрнекті пайдаланып, $h(r,q)$ функциясын үшін тұрақсыз орбиталардың радиусы табылады.

$$\sin^2\alpha_{sh}=\frac{h(r_{ph},\pi/2)^2}{h(r_0,\pi/2)^2}\Bigg|_q \tag{3.55}$$

Жоғарыдағы өрнектегі r_{ph} мәні $h_{,r}(r,\theta)^2=0$ шартынан, жарық фотондарының бұрылу нүктесі ретінде табылады. (3.48)- өрнектегі метрикалық функцияларды ескеріп және бұрылу нүктесіндегі радиусты пайдаланып көздеу қашықтығы немесе импакт параметр анықталады:

$$b_{cr}\big|_{\theta=\pi/2}=m(2q+1)^{-q-\frac{1}{2}}(2q+3)^{q+\frac{3}{2}}. \tag{3.56}$$

Бұрылу нүктесінің радиусы:

$$r_{ph}\big|_{\theta=\pi/2}=(3+2q)m. \tag{3.57}$$

Жоғарыдағы өрнектерден, егер $q=0$ болса, онда Шварцшильд қара құрдымы жағдайындағыдай, фотон үшін ең кіші орнықсыз дөңгелек орбитаның радиусы $r_{ph}=3m$ болады. Сәйкесінше, критикалық импакт параметрде дәл Шварцшильд жағдайындағыдай $b_{cr}=3\sqrt{3}\,m$ болатынын көреміз.

Қажетті шамаларды пайдаланып, r_o қашықтықта орналасқан бақылаушы үшін көлеңкенің бұрыштық өлшемін мына формуламен анықтауға болады:

$$\sin^2\alpha_{sh}=\frac{m^2}{r_0^2}(1+2q)^{-1-2q}(3+2q)^{3+2q}\left(1-\frac{2m}{r_0}\right)^{1+2q}. \qquad (3.58)$$

Жоғарыдағы өрнекте, $q=0$ болғанда Шварцшильд кеңістік-уақытында пайда болатын көлеңкенің бұрыштық өлшемімен бірдей болады.

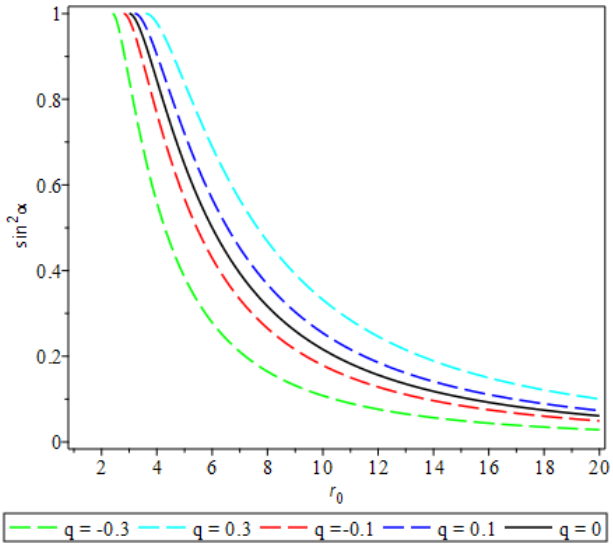
Дербес жағдайларда, $q=-1/2$ болғанда, фотон сферасы қалыптаспайды және критикалық импакт параметр $b_{cr}=2m$, көлеңкенің бұрыштық өлшемі

$$\sin\alpha_{sh}=\frac{2m}{r_0}, \qquad (3.58a)$$

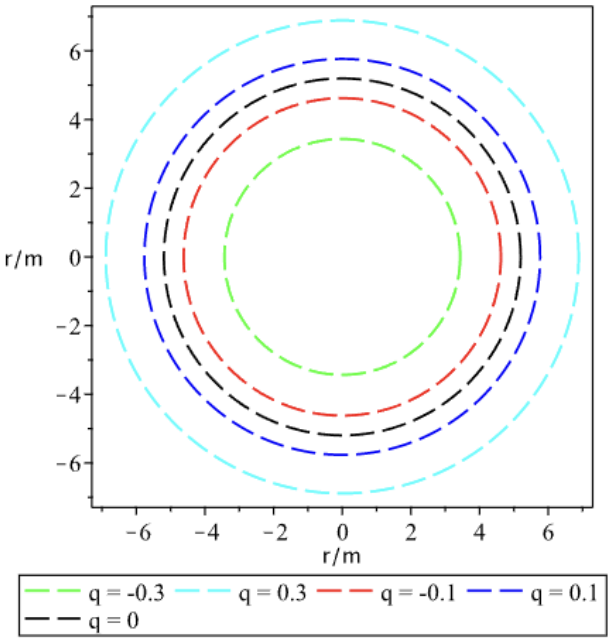
бұл шама Шварцшильд кеңістік-уақытында пайда болатын көлеңкенің бұрыштық өлшемінен кіші болады, алыс қашықтықтағы бақылаушы үшін көлеңкелердің бұрыштық өлшемі тек орталық дененің массасына тәуелді.

Егер, жарықтың орталық дененің жанынан өтетінін ескерсек, онда мына шарттарды жазуға болады: $b_{cr}>0$ және $r_{ph}\geq 0$. Бұл шарттар көлеңкелердің қалыптасу ерекшеліктері бойынша, квадрупольдық параметрдің рұқсат етілетін мәндер аумағын шектейді. (3.56) және (3.57) өрнектерін пайдаланып, көлеңкелердің пайда болуы үшін, орталық дене квадрупольдық параметрінің мүмкін болатын ең кіші мәні $q\geq -1/2$ болады. Бұл нәтижені сандық есептеулер арқылы нақтыланды, яғни, көлеңкелердің бұрыштық өлшемі нөл градустан бастап тоқсан градусқа дейінгі мәндерді алуына болады деп есептесек, онда квадрупольдік параметрдің мүмкін болатын мәндерін бақылаушының орны нақты берілген жағдай үшін теңсіздіктерді арнайы сандық әдістер арқылы зерттеп анықтауға болады. Егер q≠0 болса, фотон үшін ең кіші орнықсыз орбитаның r_{ph} шамасы квадрупольдық параметрдің оң және теріс мәндеріне байланысты Шварцшильд жағдайындағы фотон сферасының радиусынан үлкен немесе кіші болады, немесе, дәлірек айтсақ, оң квадрупольдық мәндер үшін фотон радиусы үлкен, ал теріс квадрупольдық мәндер үшін кіші болады.

3.4-суретте әртүрлі сценарийлердегі көлеңкелердің бұрыштық өлшемдері көрсетілген. r_0 нүктесіндегі бақылаушы үшін олардың бұрыштық өлшемдері әртүрлі. Бірдей қашықтықтағы бақылаушы үшін, квадрупольдық параметрдің оң мәндерінде салыстырмалы түрде Шварцшильд қара құрымындағы көлеңкенің бұрыштық өлшемінен үлкен болады, ал теріс квадрупольдық мәндер үшін керісінше болатыны 3.5-суретте көрсетілген.



Сурет 3.4 $-\sin^2\alpha_{sh}$ функциясы әртүрлі сценарийлердегі көлеңкелердің бұрыштық өлшемі. Шварцшильд жағдайы үшін қара сызық



Сурет 3.5 – бірдей $r_0 = 20$ қашықтықтағы бақылаушы үшін әртүрлі сценарийлердегі көлеңкелердің көрінетін жиегінің өлшемі. Шварцшильд жағдайы үшін қара сызық

Үлкен қашықтықтағы бақылаушы үшін, көлеңкенің бұрыштық өлшемінің теңдеуі мына түрге келеді:

$$\alpha_{sh} = \frac{m}{r_0}\left(1+2q\right)^{-\frac{1}{2}-q}\left(3+2q\right)^{\frac{3}{2}+q}. \qquad (3.54)$$

Бұл өрнектен, егер әр түрлі массадағы қара құрдым мен жалаңаш сингулярлықты қарастырсақ, таңдап алған массамен квадрупольдық параметрге байланысысты пайда болған көлеңкенің бұрыштық өлшемі бірдей болуы мүмкін.

Жоғарыдағы талдауларға сүйеніп, жинақтап айтсақ: қара құрдымдардың көлеңкелері фотон сферасының болуына тікелей байланысты болса, жалаңаш сингулярлықтардың фотон сферасы жоқ болса да (мысалы нөлдік жалаңаш сингулярлық жағдайында) және квадрупольдық параметрдің $q \geq -1/2$ кезінде де көлеңкелер қалыптасады. Жалпы жағдайда, жалаңаш сингулярлықтың кеңістік-уақытындағы пайда болған көлеңкелердің өлшемі Шварцшильд кеңістік-уақытынан ерекшеленеді: нөлдік жалаңаш сингулярлықтың кеңістік-уақытында кіші бұрыштық өлшемі бар көлеңке болады; q-метрикалық кеңістік-уақыт үшін көлеңке өлшемі тікелей квадрупольдық параметрдің мәніне байланысты Шварцшильд жағдайымен салыстырғанда үлкен немесе кіші болуы мүмкін.

Алыс қашықтықтағы бақылаушыға Шварцшильд қара құрдымынан пайда болатын көлеңкелер нөлдік жалаңаш сингулярлықтардан және квадрупольдық жалаңаш сингулярлықтардан пайда болатын көлеңкелердің көрінетін жиегінен ажырату қиын, қалыптасатын көлеңкелердің бұрыштық өлшемі таңдап алған параметрге, нақтырақ айтсақ, әр түрлі масса мен квадрупольдық параметрге байланысты, сондықтан астрофизикалық көлеңкелерді қара құрдымдар ғана емес, олардың баламасы болып табылатын әр түрлі жалаңаш сингулярлықтар да беруі мүмкін.

ҚОРЫТЫНДЫ

Жұмыста, ықшам объектілердің гравитациялық өрісін сипаттайтын Эйнштейн өріс теңдеулерінің өстік симметриялы квадрупольдық шешімдері туралы толықтай шолулар жасалды және олардың кеңістік-уақыт қасиеттеріне талдаулар жасалды.

Мардымсыз деформацияланған ықшам объектілердің сыртқы гравитациялық өрісін сипаттайтын, квадрупольдық параметр деңгейінде массалық таралуды ескеретін, жуықталған шешім алынды. Алынған шешімнің кеңістік-уақыт қасиеттері зерттеліп, $r = m$ гипербетте сингулярлық бар екені көрсетілді, бұл шешім белгілі басқа шешімдерге қарағанда өзгеше.

Жуықталған квадрупольдық метрика жағдайында, квадрупольдық параметрдің сынақ бөлшектердің геодезиялық қозғалысына әсері зерттелді. Сынақ бөлшектердің дөңгелек орбиталары және олардың орнықтылық қасиеттері зерттелді және тұйықталмаған траекторияларда, бөлшектің қозғалыс бағытына байланысты квадрупольдық параметрдің мәнін анықтауға болатыны көрсетілді.

Астрофизикалық объектілердің көлеңкелерін сипаттайтын аналитикалық өрнектер алынды, жалаңаш сингулярлық және қара құрдым көлеңкелерінің бұрыштық өлшемдері салыстырылды, нәтижесінде алыс қашықтықтарда алынған көлеңкелердің пішіндері негізінде оларды ажырату қиын екені және жалаңаш сингулярлықтардың қара құрдымдарға балама болатыны көрсетілді. Жалаңаш сингулярлы кеңістің-уақыттарда, сингулярлыққа жақын аумақта кванттық гравитацияның әсерлері басым болып, көлеңкелер пайда болатын сингулярлыққа жақын аймақтарда байқалуы мүмкін. Сондықтан көлеңкелерді зерттеуде кеңістік-уақыттың сингулярлыққа жақын аумақтарын егжей-тегжейлі талдауды талап етеді.

АЛҒЫС АЙТУ

Диссертацияны орындау барысында академиялық деңгейде табысты орындалынуына үнемі кеңес беріп отырған профессор Кэведо Эрандоға алғыс айтамын. Жетекшілерім профессор Абишев Медеу Ержанұлына, профессор Бейсен Нұрзада Әбдібекқызына және доктор Тұрсынов Арманға зерттеу жұмысыма берген кеңестері үшін алғыс айтамын. Диссертациялық жұмысты оқып, құнды пікірлерімен бөліскен профессор Бошкаев Қуантай Ауғазыұлына және доктор Аймуратов Ерлан Қайратұлына рахмет айтамын! Жасаған баяндамаларымды тыңдап, бағалы пікірлер ұсынған 212 бөлме физиктеріне рахмет айтамын! Барлық уақытта қолдау көрсетіп, жігерлендіріп отырған отбасыма алғыс айтамын!

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1 Einstein A. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie // Ann. Phys., – 1916. – Vol. 354 – P. 769 – 822.

2 Stephani H., Kramer D. M. MacCallum A. H., Hoenselaers C., Herlt E. Exact Solutions of Einstein's Field Equations. – Cambridge: Cambridge University Press, 2003. – 736 p.

3 Ernst, Frederick J. New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem. II // Physical Review, – 1968. – Vol. 168, №5. – P. 1415-1417.

4 Quevedo H., Mashhoon B. Exterior gravitational field of a rotating deformed mass // Physics Lett. A. – 1985. – Vol.109, №1. – P. 13-18.

5 Quevedo H., Mashhoon B. Exterior gravitational field of a charged rotating mass with arbitrary quadrupole moment// Physics Lette. A. –1990. – Vol.148, №3.– P. 149-153.

6 Quvedo H. Class of stationary axisymmetric solutions of Einstein's equations in empty space// Physical Review D (Particles and Fields). – 1986. – Vol. 33, №2. – P. 324-327.

7 Quevedo H. The Kerr-NUT metric with all mass multipole moments // Proceedings of the Fourth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, Part B, №.1086. – P. 1015-1023.

8 Quevedo H. On the exterior gravitational field of a mass with a multipole moment // General Relativity and Gravitation. – 1987. – Vol. 19, №10. – P.1013-1023.

9 Quevedo H. Multipole Moments in General Relativity-Static and Stationary Vacuum Solutions // Fortschritte der Physik / Progress of Physics. – 1990. – Vol. 38, №10. – P. 733-840.

10 Mashhoon B., Quevedo, H. Rotating gravitational waves// Physics Lett. A. – 1990. – Vol. 151, №9. – P. 464-468.

11 Quevedo H. General static axisymmetric solution of Einstein's vacuum field equations in prolate spheroidal coordinates // Physical Review D (Particles and Fields). – 1989. – Vol. 39, №10. – P. 2904-2911.

12 Quevedo H. Generating solutions of the Einstein-Maxwell equations with prescribed physical properties // Physical Review D (Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology). – 1992. – Vol. 45, №4. – P.1174-1177.

13 Weyl H. Z. Gravitationstheorie // Annalen der Physik, – 1917. – Vol. 359, №18. – P.117-145.

14 Lewis T. Some Special Solutions of the Equations of Axially Symmetric Gravitational Fields // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. – 1932. – Vol. 136, №829. – P. 176-192.

15 Papapetrou A. Champs gravitationelle stationaires a symetrie axiale // Annalles de l'Institute Henri Poincare, Serie Physique theorique. – 1966. – Vol.4, №4.

– P. 83-112.

16 Islam J. N. // Book-Review - Rotating Fields in General Relativity Nature. – 1985. – Vol.316, № 6040. – P. 832.

17 Carter B. Killing Horizons and Orthogonally Transitive Groups in Space-Time // Journal of Mathematical Physics. – Vol. 10, №1. – P.70 – 81.

18 Synge J. L. Book Reviews Relativity: The General Theory. North-Holland. - Amsterdam: Interscience, 1960. – 506 p.

19 Zipoy D. M. Topology of Some Spheroidal Metrics // Journal of Mathematical Physics. – 1966. – Vol. 7, №6. – P.1137 – 1143.

20 Voorhees B. H. Static Axially Symmetric Gravitational Fields // Physical Review D. – 1970. – Vol. 2, №10. – P. 2119 – 2122.

21 Papadopoulos D. S. Witten, Louis Some properties of a particular static, axially symmetric space-time // Physical Review D (Particles and Fields). – 1981. – Vol. 24, №2. – P.320 – 326.

22 Herrera, L., Pastora J. L. Hernández Measuring multipole moments of Weyl metrics by means of gyroscopes // Journal of Mathematical Physics. – 2000. – Vol. 41, №11. – P. 7544 – 7555.

23 Herrera L., Magli G., Malafarina D. Non-spherical sources of static gravitational fields: Investigating the boundaries of the no-hair theorem // General Relativity and Gravitation. – 2005. – Vol. 37, №8. – P.1371– 1383.

24 Dadhich N. and Date G. On a Peculiar Family of Static, Axisymmetric, Vacuum Solutions of the Einstein Equations. http://arxiv.org/abs/gr-qc/0012093. 24. 12. 2000.

25 Kodama H., Hikida W. Global structure of the Zipoy Voorhees Weyl spacetime and the dgr = 2 Tomimatsu Sato spacetime // Classical and Quantum Gravity. – 2003. – Vol. 20, №23. – P. 5121– 5140.

26 Quevedo H. Mass Quadrupole as a Source of Naked Singularities // International Journal of Modern Physics D. – 2011. – Vol. 20, №10. – P. 1779 – 1787.

27 Geroch R. Multipole Moments. I. Flat Space // Journal of Mathematical Physics. – 1970. – Vol. 11, №6, – P.1955 – 1961.

28 Geroch R. Multipole Moments. II. Curved Space // Journal of Mathematical Physics. – 1970. – Vol. 11, №8. – P. 2580 – 2588.

29 Quevedo H., Toktarbay S., Aimuratov Ye., Zhami B. Quadrupolar gravitational fields described by the Zipoy-Voorhees metric. // Тезисы докл. Актуальные проблемы современной физики. Межд. конф. посв. 75-летию академика Абдильдина М.М. – Almaty, 2013. – С.48.

30 Quevedo H, Toktarbay S., Yerlan A. Quadrupolar gravitational fields described by the q-metric // International Journal of Mathematics and Physics. – 2012. –Vol. 3, №2. – P. 133 – 139.

31 Landau Lifshitz. The Classical Theory of Fields, 4th Edi. Vol2, in Course of Theoretical Physics. – Butterworth: Heinemann press, 1980. – 420 p.

32 Bernard S. A First Course in General Relativity. – Cambridge: Cambridge University Press, 2009. – 406 p.

33 Vulcanov D.N., Ciobanu G. Maple procedures in teaching the canonical formalism of general relativity // eprint arXiv:physics/0010053 10/2000.

34 Vulcanov, Dumitru N., Vulcanov, Valentina D. Maple+GrTensorII libraries for cosmology// eprint arXiv:cs/0409006 01.09.2004.

35 Sporea Ciprian A., Vulcanov Dumitru N. Using Maple + GRTensorII in teaching basics of General Relativity and Cosmology // eprint arXiv:1411.7969 01.11.2014.

36 Hehl F. W., Puntigam R. A., Ruder H. Relativity and Scientific Computing. Computer Algebra, Numerics, Visualization // eprint arXiv:1411. 12.10.2013.

37 MacCallum M. Algebraic Computing in General Relativity: Lecture Notes from the First Brazilian School on Computer Algebra. – Clarendon: Clarendon Press, 1994. – 377p.

38 Frank Y. Wang Physics with MAPLE: The Computer Algebra Resource for Mathematical Methods in physics // eprint arXiv:1411. 01. 09.01.2014.

39 Dumitru N. Vulcanov, Gabriela Ciobanu Maple procedures in teaching the canonical formalism of general relativity // eprint arXiv:1411.9. 07.01.2014.

40 Heinicke Ch., Hehl, Friedrich W. Computer algebra in gravity// eprint arXiv:gr-qc/0105094. 06.05.2014.

41 Lake K. All static spherically symmetric perfect-fluid solutions of Einstein's equations // Physical Review D, – 2003. – Vol. 67, №10. id. 104015.

42 Rahman Sh. Visser M. Spacetime geometry of static fluid spheres// Classical and Quantum Gravity, – 2002. – Vol. 19, №5. – P. 935 – 952.

43 Ciprian A., Dumitru N. Using Maple + GRTensorII in teaching basics of General Relativity and Cosmology. http://arxiv.org/abs/physics/0010053. 22.12.2001.

44 Abishev M., Boshkayev K., Quevedo H., Toktarbay S. Accretion disks around a mass with quadrupole// Gravitation, Astrophysics, and Cosmology, – 2016. – Vol. 45, №18. – P.185 – 186.

45 Pugliese D., Quevedo H., Ruffini R. Equatorial circular motion in Kerr spacetime// Physical Review D. – 2011. – Vol. 84, №4. id. 044030.

46 Шинибаев М.Д., Беков А.А., Акинбеков Е.К., Рахимжанов Б.Н., Бердалиев Д.Т., Умирбеков М.С. Новый метод исключения «малых знаменателей» в задаче о движении резонансных ИСЗ // Доклады НАН РК. – 2015. № 3. – С.126-130.

47 Boshkayev K., Gasperin E., Gutierrez-Pineres A. C., Quevedo H., Toktarbay S. Motion of test particles in the field of a naked singularity // submitted to the proceedings of ICGAC-12. http://arxiv.org/abs/1510.03696. 01.07.2015.

48 Markus H. Black Hole Uniqueness Theorems. – Cambridge: Cambridge University Press, 1996. – 264 p.

49 Hoenselaers C., Dietz W. Solutions of Einstein's Equations: Techniques and Results. – Berlin: Springer press, 1970. – 205 p.

50 Manko, V. S. letter to the editor: On the description of the external field of a static deformed mass // Classical and Quantum Gravity. – 1990. – Vol. 7, № 9. – P. L209 – L211.

51 Castejon A., Manko, V. S. On a stationary rotating mass with an arbitrary multipole structure// Classical and Quantum Gravity, – 1990. – Vol. 7, №5. – P. 779– 785.

52 Manko V. S., Mielke E. W., Sanabria-Gómez, José D. Exact solution for the exterior field of a rotating neutron star // Physical Review D. – 2000. – Vol. 61, №8. – P. 40 – 43.

53 Pachón Leonardo A., Rueda Jorge A., Sanabria-Gómez José D. Realistic exact solution for the exterior field of a rotating neutron star // Physical Review D. – Vol.73, № 10. id. 104038 05/2006.

54 Quevedo H., Mashhoon B. Generalization of Kerr spacetime // Physical Review D, – 1991. –Vol. 43, №12. – P.3902 – 3906.

55 Asada H., Futamase T., Hogan P. BOOK REVIEW: Equations of Motion in General Relativity Equations of Motion in General Relativity // Classical and Quantum Gravity, – 2012. – Vol.29, № 5. id. 059002.

56 Toktarbay S., Quevedo H. A stationary q-metric // Gravitation and Cosmology. – 2014. – Vol. 20, № 4. – P. 252 – 254.

57 Toktarbay S., Abishev M.E., Quevedo H., Mansurova A., Muratkhan A. Axisymmetric solution of Einstein's field equations with quadrupole // The Fifteenth Marcel Grossmann Meeting. – Roma, – 2022. – P. 1415-1420.

58 Toktarbay S., Abishev M.E., Talkhat A.Z., Muratkhan A., Kenzhebayeva S. S., Abylayeva A.Zh. Investigation of the stability of orbits by using the adiabatic theory of motion in general relativity // The Fifteenth Marcel Grossmann Meeting. – Roma, 2022. – P. 500-504.

59 Насырова Б.С., Муратхан А. Идеал сұйықты мардымсыз деформацияланған денелердің гравитациялық өрісі // Студенттер мен жас ғалымдардың «ФАРАБИ ӘЛЕМІ» атты халықаралық ғылыми конференциясы. – Алматы, – 2020. – С. 17

60 Pankaj S. Joshi . The story of collapsing stars. – Oxford University Press, 2015. – 226 p.

61 Kip S. Thorne. Black Holes & Time Warps. – London : Picador, 1994. – 619p.

62 Wheeler J. C. Cosmic Catastrophes – Cambridge: Cambridge University Press, 2007. – 358 p.

63 Bernard F. Schutz K. Ü. A First Course in General Relativity. – Cambridge: Cambridge University Press, 2009. – 412 p.

64 Pankaj S. Joshi and Ramesh Narayan. Black Holes,Firewalls and Chaos from Gravitation Collapse. (e-Print: arXiv:1402.3055 [hep-th]);

65 Pankaj S. Joshi and Daniele Malafarina. Recent Developments in Gravitational Collapse and Spacetime Singularities // International Journal of Modern Physics D. – 2011. – Vol. 20. №14. – P.2641– 1729.

66 Pankaj S. Joshi, Daniele Malafarina, and Ravindra V. Saraykar. Genericity Aspects in Gravitational Collapse to Black Holes and Naked Singularities// International Journal of Modern Physics D. – 2012. – Vol. 21. №08. id: 1250066.

67 Hawking S. W., Ellis G. F. R. The Large Scale Structure of Spacetime. – Cambridge: Cambridge University Press, 1973. – 391 p.

68 Pankaj S. Joshi. Global Aspects in Gravitation and Cosmology. – New York: Clarendon Press, 1993. – 377 p.

69 Pankaj S. Joshi. Gravitational Collapse and Spacetime Singularities. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007. – 284 p.

70 Roy P. Kerr. Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics // Phys. Rev. Lett. – 1963. – Vol.11, №237. – P. 237- 238.

71 Minser Ch. W., Misner J. A. Wheeler K. S., Thorne J. A. Gravitation. – San Francisco: University Press, 1973. – 1305 p.

72 Quevedo H. Mass Quadrupole as a Source of Naked Singularities // International Journal of Modern Physics D. – 2011. – Vol. 20, №10. – P. 1779-1787.

73 Heusler M. Black Hole Uniqueness Theorems // – Cambridge: Cambridge University Press, 1996. – 384 p.

74 Boshkayev K., Quevedo H., Toktarbay S., Zhami B., Abishev M. // Gravit. Cosmol. – 2016. – Vol. 22, №4. – P. 305.

75 Zipoy D. M. Topology of Some Spheroidal Metrics // Journal of Mathematical Physics. – 1966. – Vol. 7, №6. – P.1137 – 1143.

76 Voorhees B. H. Static Axially Symmetric Gravitational Fields // Physical Review D. – 1970. – Vol. 2, №10. – P. 2119 – 2122.

77 Toktarbay S., Quevedo H. Approximate stationary axisymmetric vacuum solution of Einstein's field equations // Book of abstracts of International Scientific Conference of Students and Young Scientists «FARABI ALEMI ». – Almaty, 2015. – P.11.

78 Abishev M.E., Quevedo H., Toktarbay S. Approximate perfect-fluid solutions with quadrupole moment // Book of abstracts of XIIth International Conference on Gravitation, Astrophysics and Cosmology. – Moscow, 2015. – P.36.

79 Abishev M., Beissen N., Belissarova F., Boshkayev K., Mansurova A., Muratkhan A., Quevedo H., Toktarbay S. Approximate perfect fluid solutions with

quadrupole moment // International Journal of Modern Physics D. – 2021. – Vol. 30, №13. id: 2150096.

80 Toktarbay S., Quevedo H., Abishev M., Muratkhan A. Gravitational field of slightly deformed naked singularities // European Physical Journal C. – 2022. –Vol. 82, – № 4. – P. 382.

81 Beissen N.A., Utepova D., Muratkhan A., Orazymbet A., Khassanov M., Toktarbay S. Application of GBT theorem for gravitational deflection of light by compact objects // Recent Contributions to Physics. – 2023. –Vol.1, – № 84. – P. 15 – 22.

82 Абишев М.Е., Кэведо Э., Токтарбай С., Мансурова А., Муратхан А., Токтарбек С., Иманбай С. Стационарное вакуумное решение уравнений Эйнштейна // Вестник. Серия физическая. – 2019. –Vol.69, – №2. – P. 4 – 9.

83 Мансурова А.А., Бейсен Н.А., Кэведо Э., Алимкулова М.О., Муратхан М., Кашкеева А., Демисенова Д.А. Согласование условий для внутреннего и Внешнего пространства-времени Астрофизических компактных объектов // Вестник. Серия физическая. – 2019. –Vol.71, – № 4. – P.45–50.

84 Abishev M.E., Quevedo H., Beissen N., Toktarbay S., Mansurova A., Alimkulova M., Muratkhan A., Dzhapashov N.M., Kusmanova B.C. Определения релятивистских мультипольных моментов в ньютоновской гравитации массивных объектов // Вестник. Серия физическая. – 2020. –Vol.72, – № 1. – P.11–18.

85 Allahyari A., Firouzjahi H., Mashhoon B. Quasinormal modes of a black hole with quadrupole moment // Phys. Rev. D – 2018. Vol 99, №4. id:044005.

86 Pugliese D., Quevedo H., Ruffini R. Motion of charged test particles in Reissner-Nordström spacetime // Phys. Rev. D – 2011. – Vol.83, №10.id: 104052.

87 Felice F. Repulsive phenomena and energy emission in the field of a naked singularity. Astron.// Astrophys. – 1974. – Vol.34, №.15. –P.79–83.

88 Luongo O. O., Quevedo H. Toward an Invariant Definition of Repulsive Gravity // Proceedings of the Twelfth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, – Singapore, World Scientific. 2012. – P.1029.

89 Luongo O., Quevedo H. Characterizing repulsive gravity with curvature eigenvalues // Phys. Rev. D – 2014. – Vol. 90, №8. id 084032.

90 Schneider P., Ehlers J., Falco E. E. Gravitational Lenses, – Berlin: Springer-Verlag. 1992. –560 p.

91 Blandford R. D., Narayan R. Cosmological applications of gravitational lensing // Ann. Rev. Astron. Astrophys. – 1992. – Vol.30. – P.311– 358.

92 Petters A. O., Levine H., Wambsganss J. Singularity Theory and Gravitational Lensing, – Birkhäuser Boston, MA. 2001. – 603 p.

93 Perlick V. Gravitational lensing from a space-time Perspective // Liv. Rev. Relativity. – 2004. – Vol.7, №.4. –P.1433.id: 10.12942.

94 Bartelmann M. Gravitational lensing // Class. Quantum Grav. – 2010. – Vol.27.id: 233001

95 Dodelson S. Gravitational Lensing, – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. –225p.

96 Congdon A. B., Keeton C. Principles of Gravitational Lensing: Light Deflection as a Probe of Astrophysics and Cosmology, – Switzerland: Springer cham, 2018. – 287 p.

97 The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope results. I. The shadow of the supermassive black hole // Astrophys. J. Lett. – 2019. – Vol. 875. №.1. –P.1–17.

98 The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope results. II. Array and instrumentation // Astrophys. J. Lett. – 2019. – Vol. 875. №.2. – P.1 – 28.

99 The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope results. III. Data processing and calibration // Astrophys. J. Lett. – 2019. – Vol. 875. №.3. – P.1 – 32.

100The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope results. IV. Imaging the central supermassive black hole // Astrophys. J. Lett. – 2019. – Vol. 875. №.4. – P.1 – 52.

101 Falcke H., Melia F., Agol E. Viewing the shadow of the black hole at the Galactic center // Astrophys. J. Lett. – 2000. – Vol.528, №1. – P.1–16.

102 Melia F., Falcke H. The Supermassive Black Hole at the Galactic Center // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. – 2001. – Vol. 39. – P.309–352.

103 Synge J. L. The escape of photons from gravitationally intense stars // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. – 1966. – Vol.131. – P. 463 – 466.

104 Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика. II. // *УФН.* – 1965. – Vol.86. – P.447–536.

105 Chandrasekhar S. The Mathematical Theory of Black Holes// – Oxford: Oxford Univ. Press, 1983. –215 с.

106 Young P. J. Capture of particles from plunge orbits by a black hole // Phys. Rev. D –1976. –Vol.14, №12. –P. 3281–3289.

107 Luminet J.-P. Seeing black holes: From the computer to the telescope // Universe. –2018. –Vol.4, №86. –P.86. id:4080086

108 Dymnikova I. G. Motion of particles and photons in the gravitational field of a rotating body, Sov. Phys. Usp. Дымникова И. Г. Движение частиц и фотонов в гравитационном поле вращающегося тела // *УФН,* –1986. –Том.148, №215. – С.393 – 432.

109 Johannsen T., Psaltis D. Testing the no-hair theorem with observations in the electromagnetic spectrum. II. Black hole images // Astrophys. J. – 2010. –Vol.718. №1. – P.446–454.

110 Johnson M.D., Lupsasca A., Strominger A., et al, Universal interferometric signatures of a black hole's photon ring // Science Advances, – 2020. – Vol.6, №12. id:eaaz1310

111 Bambi C. Black Holes: A Laboratory for Testing Strong Gravity // – Springer: Singapore, 2017. – 317 p.

112 Gralla S.E., Holz D. E., Wald R.M. Black hole shadows, photon rings, and lensing rings // Phys. Rev. D – 2019. – Vol.100, №2. id:024018

113 Cederbaum C. Uniqueness of photon spheres in static vacuum asymptotically flat spacetimes// Class.Quantum.Grav. – 2016. – Vol.33, №7. id:075006

114 Yazadjiev S., Lazov B. Uniqueness of the static Einstein-Maxwell spacetimes with a photon sphere// Class. Quantum Grav. – 2015. – Vol.32, №16. id: 165021.

115 Cederbaum C., Galloway G.J. Uniqueness of photon spheres in electro-vacuum spacetimes// Class. Quantum Grav. – 2016. – Vol.33, №7. id: 075006.

116 Perlick V., Tsupko O.Y. Calculating black hole shadows: review of analytical studies // Physics Reports. – 2022. – Vol.947. – P.1– 39.

117 Hasse W., Perlick V. Gravitational lensing in spherically symmetric static spacetimes with centrifugal force reversal // Gen. Rel. Grav. – 2002. – Vol.34. – P. 415– 433.

118 Muratkhan A., Orazymbet A., ZhakipovaM., Assylbek M., Toktarbay S. A shadows from the static black hole mimickers // International Journal of Mathematics and Physics, – 2022. – Vol.13, №2. – P. 44 – 49.

119 Madan S., Bambhaniya, P. Tidal force effects and periodic orbits in null naked singularity spacetime // General Relativity and Quantum Cosmology, – 2022. – Vol.13, №2. – P. 44 – 49.

120 Narayan R., Johnson M.D., Gammie C.F. The shadow of a spherically accreting black hole //Astrophys. J. Lett. – 2019. – Vol.885, №2. L33.

121 Bronzwaer Th., Davelaar J., Younsi Z. et al, Visibility of black hole shadows in low-luminosity AGN// Mon. Not. Roy. Astron. Soc. – 2021. – Vol.501.id:4722

122 Samuel Gralla E. Can the EHT M87 results be used to test general relativity?// Phys. Rev. D, – 2021. – Vol.103, №2. Id:024023

ҚОСЫМША А

Ньютондық физикадағы мультипольдік моменттердің анықтамаларында координаталық тәуелділік бар. Ньютондық гравитацияда мультипольдік моменттер – объектідегі массаның таралуын сипаттау үшін қолданылатын математикалық шамалар. Олар сфералық гармоника тұрғысынан гравитациялық потенциалдың кеңеюінен алынған, массаның орталық нүктесінен қашықтыққа қатысты қалай таралатынын білдіреді. Ең төменгі ретті мультипольдік моменттерге монополь (жалпы массаға қатысты), диполь (масса центріне қатысты) және квадруполь (массаның таралу пішініне қатысты) жатады.

Релятивистік физикада, әсіресе жалпы салыстырмалылық контексінде, мултипольдык моменттердің көптеген анықтамалары бар, бірақ олар масса мен энергиядан туындаған кеңістік-уақытының қисықтығына байланысты күрделірек.

Әдебиеттерде мультипольдік моменттердің мынадай релятивистік анықтамалары жиі кездеседі:

1. Герох – Хансен (Geroch – Hansen) анықтамасы;
2. Торн (Thorne) анықтамасы;
3. Бэйг – Саймон (Beig – Simon) анықтамасы;

Жинақтай айтсақ, Герох – Хансен мултипольдық моменттерін есептеу төмендегідей жүріледі:

Эрнст потенциалы мен Герох–Хансен мультипольдық моменттері арасындағы байланыс бар екені белгілі. Осы байланыстарды және нақты есептеулерге қажетті рекуреттік формулаларды пайдалануға болады.

Созылыңқы сфероидалық координаттарда $\Upsilon = 1$ симметрия өсінде Эрнст потенциалын ξ қарастырайық, бұндағы $\xi = \xi(X, Y)$.

Вейл координатасы мына байланыспен $z\ (z = \sigma XY)$ енгізіледі. Шексіздіктегі нүктеге байланысты, немесе асимптоталық жазық шартын пайдаланып жаңа координатаға өтеміз:

$$\tilde{z} = \frac{1}{z} = \frac{1}{mx},\ \sigma = m\ . \tag{A1}$$

Бұл координаталарда $z \to \infty$ немесе $\tilde{z} = 0$ болып анықталады. Жаңа координаталарға байланысты потенциал былай қайта анықталады:

$$\tilde{\xi}(\tilde{z}, 1) := \frac{1}{\tilde{z}} \xi(\tilde{z}, 1). \tag{A2}$$

Статикалық, осьтік симметриялы кеңістік-уақытта Эрнст потенциалы төмендегідей анықталады:

$$\xi(x,y)=\frac{1-e^{2\psi}}{1+e^{2\psi}}\ . \tag{A3}$$

Статикалық және стационар осьтік симметриялы шешімдер үшін Герох–Хансен мультипольдік моменттері төмендегі өрнекпен анықталады:

$$M_l=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{l!}\frac{d^l\tilde{\xi}(\tilde{z},1)}{d\tilde{z}^l}\Big|_{\tilde{z}=0}+d_l\left(m_{l-1},m_{l-2},...,m_0\right)\right\} \tag{A4}$$

және

$$J_l=\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{l!}\frac{d^l\tilde{\xi}(\tilde{z},1)}{d\tilde{z}^l}\Big|_{\tilde{z}=0}+d_l\left(m_{l-1},m_{l-2},...,m_0\right)\right\}\ . \tag{A5}$$

Бұл өрнектерден, егер, $l<4$ болса, онда қосымша d_l мүшесі нөлге тең болады. d_l шамасы $l\geq 4$ үшін бастапқы (A2) және (A3) өрнектерін қолдану арқылы анықталады. Кейбір d_l компоненттерінің нақты мәні белгілі:

$$d_0=d_1=d_2=d_3=0\,, \tag{A6a}$$

$$d_4=\frac{1}{7}m_0^*\left(m_1^2-m_2m_0\right), \tag{A6b}$$

$$d_5=\frac{1}{3}m_0^*\left(m_2m_1-m_3m_0\right)+\frac{1}{21}m_1^*\left(m_1^2-m_2m_0\right) \tag{A6c}$$

$$d_6=\frac{2}{7}m_0^*\left(4m_2^2+5m_3m_1-9m_4m_0\right)+\frac{4}{33}m_1^*\left(m_2m_1-m_3m_0\right)+$$

$$+\frac{1}{231}\left(5m_2^*-7m_0^{*2}\right)\left(m_1^2-m_2m_0\right), \tag{A6d}$$

бұл жерде

$$m_l:=\frac{1}{l!}\frac{d^l\tilde{\xi}(\tilde{z},1)}{d\tilde{z}^l}\Big|_{\tilde{z}=0}\,. \tag{A7}$$

Мұндағы “*” белгісі комплекс түйіндес дегенді білдіреді. Сонымен, релятивистік мультипольдік моменттердің есептелінуі m_l есептелінуіне эквивалентті.

Эрнст ξ потенциалын $\tilde{z}$ дәрежесі бойынша жіктесек

$$\xi\left(\tilde{z},1\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d^k\xi\left(\tilde{z},1\right)}{d\tilde{z}^k}\Big|_{\tilde{z}=0}\frac{\tilde{z}^k}{k!} \tag{A8}$$

(A2) және (A6) өрнектерінен мынаны аламыз:

$$m_l=\frac{1}{\left(l+1\right)!}\frac{d^{l+1}\xi\left(\tilde{z},1\right)}{d\tilde{z}^{l+1}}\Big|_{\tilde{z}=0}. \tag{A9}$$

Егер (A9) өрнегіне E енгізу арқылы

$$\xi=\frac{1-\mathrm{E}}{1+\mathrm{E}}, \tag{A10}$$

m_l мәнін есептеуге арналған келесі рекуренттік формуланы аламыз:

$$m_l=-\frac{h_{l+1}}{\left(l+1\right)!}\Big|_{\mathrm{Y}=1,\tilde{z}=0}, \tag{A11}$$

мұндағы

$$h_1=\frac{1}{2E}\frac{dE}{d\tilde{z}}, \tag{A12}$$

және $l\geq 2$ үшін

$$h_l=\frac{dh_{l-1}}{d\tilde{z}}+2\xi h_1h_{l-1}. \tag{A13}$$

Стационар метрикадағы Герох–Хансен мультипольдік моменттерін есептеу үшін келесі амалдар реті қолданылады:

1. E Эрнст потенциалдарын және ξ мәндерін (A20) формулаға сай есептелінеді.

2. (A11) рекуренттік формуласын қолданып m_l шамасы анықталады.

3. Массалық мультипольдері және бұрыштық моменттің таралуының мультипольдері төмендегі өрнектерге сәйкес анықталады:

$$M_l = \mathrm{Re}\left(m_l + d_l\right) \tag{A14}$$

және

$$J_l = \mathrm{Im}\left(m_l + d_l\right). \tag{A15}$$

Ал мұндағы d_l (А5) өрнегіндегі m_l мүшесімен анықталады.

Статикалық, осьтік симметриялы шешімдер үшін Эрнст потенциалын анық түрде жазуға болады және ол мына формуламен беріледі:

$$E = \exp\left(2\psi\right). \tag{A16}$$

Бұл бұрыштық моменттің таралуының мультипольдері нөлге айналатындығын және массалық мультипольдері мына формулалармен анықталатындығын білдіреді

$$M_l = d_l - \frac{h_{l+1}}{(l+1)!}\Big|_{Y=1,\tilde{z}=0}, \tag{A17}$$

мұндағы

$$h_1 = \frac{d\psi}{d\tilde{z}}, \tag{A18}$$

$l \geq 2$ үшін

$$h_1 = \frac{dh_{l-1}}{d\tilde{z}} + 2\xi h_{l-1}\frac{d\psi}{d\tilde{z}}. \tag{A19}$$

Енді, $\xi \to \xi' = e^{i\tau}\xi$ Эрнст түрлендіруі әсерінен мультипольдік моменттердің қалай өзгеретіндігін қарастырайық.

$$\xi = \mathrm{Re}\left(\xi\right) + i\,\mathrm{Im}\left(\xi\right) \tag{A20}$$

деп жазамыз. Сонымен қатар (А20) өрнегін (А18) өрнегіне апарып қойсақ, m_l шамасы мынадай түрленетіндігін көруге болады:

$$\mathrm{Re}\left(m_l'\right) = \mathrm{Re}\left(m_l\right)\cos\tau - \mathrm{Im}\left(m_l\right)\sin\tau, \tag{A21}$$

$$\mathrm{Im}\left(m_l'\right) = \mathrm{Re}\left(m_l\right)\sin\tau + \mathrm{Im}\left(m_l\right)\cos\tau,\ l \geq 0. \tag{A22}$$

$l \le 3$ болған кезде қосымша d_l мүше нөлге айналады, ал (А17, А18) өрнектерден

$$M_l' = M_l \cos\tau - J_l \sin\tau, \tag{А23}$$

$$J_l' = M_l \sin\tau + J_l \cos\tau,\ l \le 3. \tag{А24}$$

Эрнст түрлендіруі кезінде m_l комбинациясы әртүрлі болғандықтан, бұл қатынастар $l > 3$ кезінде сақталмайды. Бірақ, $l > 3$ кезінде мультипольдік моменттерді дәл есептеу үшін (А23,А24) өрнектерін қолдануға болады.

$$M_{2k+1} = J_{2k} = 0, \qquad k = 0,1,2,\ldots \ , \tag{А245}$$

$$M_0 = m, \qquad M_2 = -ma^2,\ldots \ , \tag{А26}$$

$$J_1 = ma, \qquad J_3 = ma^3,\ldots \ . \tag{А27}$$

Бұлар Керр шешімінің M_n массалық және J_n бұрыштық мультипольдік моменттері. Сәйкес Эрнст потенциалынан созылыңқы сфероидты координаталарда Керр метрикасын алуға болады. Шын мәнінде (1.71) теңдеуде берілгендей, жаңа шешімде гравитациялық көздің айналуы туралы ақпарат бар екенін көрсетеді.

Бірінші m_n мүше толығымен кері Эрнст ξ потенциалының n –інші туындысынан анықталады, ал екінші d_n мүше n –нен кіші туындылардан тәуелді болғандықтан M_n моментті n –інші немесе одан кіші туындылар белгілі болған кезде анық есептеуге болады.

Сонымен, Шварцшильд кеңістігі үшін мультипольдік моменттер былай анықталады:

$$M_0 = m,\ M_k = 0\ \ (k \ge 1), \tag{А32}$$

ол басқа да әдістердің қолданылуымен алынған Шварцшильд метрикасының физикалық интерпретациясына сәйкес келеді.

Осы өрнектерді дәл q – метрика үшін жазуға болады, бұнда

$$M_0 = \delta m, \tag{А33}$$

$$M_2 = \frac{1}{3}\delta m^3\left(1-\delta^2\right), \tag{А34}$$

$$M_4 = \delta m^5 \left(\frac{19}{105} \delta^4 - \frac{8}{21} \delta^2 + \frac{1}{5} \right), \qquad \text{(A35)}$$

Мұндағы тұрақты дельта мәні квадрупольдық параметрмен байланысты анықталады $\delta = 1 + q$.